Capítulo 3: Una Economía Cerrada sin Dinero [*]

Franz Hamann

15 de febrero de 2006

1. Introducción

- En este capítulo introducimos el modelo macroeconómico básico que será el eje fundamental de nuestro curso.
- Los agentes en la economía son: individuos, firmas y gobierno.
- Existe un sólo bien final que es producido por las firmas y consumido por los hogares.
- Los individuos buscan maximizar su propia utilidad sujetos a dos restricciones: una de presupuesto y otra de tiempo. La restricción de tiempo indica que el individuo distribuye su tiempo entre ocio y trabajo. La feilicidad (utilidad) del individuo depende del consumo del bien final y del tiempo que dedica al ocio.
- Las firmas maximizan beneficios sujetas a una restricción de tecnología.
- El gobierno cobra impuestos de suma fija (un monto igual para todos los individuos, en unidades de producto real) y realiza gasto improductivo.
- Para exponer el modelo es necesario definir específicamente la estructura de mercado, los derechos de propiedad de los agentes económicos.
- Iniciamos con el caso en el que no hay fuente de incertidumbre en la economía (caso determinístico) y posteriormente analizamos el caso de una economía con incertidumbre (caso estocástico).

2. Una Economía Determinística

2.1. Los derechos de propiedad

- Los individuos son dueños de todos los factores de producción y dueños de las firmas.
- Todos los individuos reciben la misma dotación inicial de factores y de acciones en las firmas.
- Las firmas no poseen ni factores de producción ni acciones en otras firmas.
- Cada período las firmas arriendan el capital y contratan servicios laborales para producir un bien final, el cual es vendido a los individuos. Los beneficios que resultan de la actividad productiva se le entregan a los individuos.
- Cada período los individuos le arriendan los factores de producción a las firmas, reciben los beneficios de las firmas y compran el bien final, el cual deciden si consumir o acumular en forma de capital.

[*] Este documento hace parte de las notas de mi libro: "Teoría y Política Monetaria en Mercados Emergentes: con Aplicaciones al Caso Colombiano". Su uso es estrictamente personal y académico. En ningún momento compromete al Banco de la República, su Junta Directiva o cualquier otra persona del Banco. Los errores y cualquier tipo de apreciación contenidos en este documento son exclusivamente de mi responsabilidad.

2.2. La estructura y organización de mercado

- En la economía existe un número grande de firmas e individuos que operan en un ambiente de competencia perfecta.
- *Todas* las transacciones tienen lugar en un mercado unificado que abre en el período inicial (período 0) .[1] Dado que todas las transacciones ocurren en el momento 0, todos los precios y las cantidades se determinan *simultáneamente* en ese momento. Después de que este gran mercado ha cerrado, $t = 0, 1, 2, ..., T$, no existirán más negociaciones y los agentes económicos simplemente se comprometen a intercambiar las cantidades de bienes y factores que han contratado.
- La convención de precios en estos mercados es la siguiente:
  - p_t es el precio de una unidad del bien final para entrega en el período t, expresado en cualquier unidad de cuenta.
  - w_t es el precio de una unidad de trabajo para entrega en el período t, expresado en unidades del bien final del período t. Es decir, w_t es el salario real.
  - r_t es el precio de arrendamiento de una unidad de captal para entrega en el período t, expresado en unidades del bien final del período t. Es decir, r_t lo podemos pensar como la tasa de interés real.

2.3. El Problema de las Firmas

- En la economía existe un número grande de firmas que operan en un ambiente de competencia perfecta. Todas las firmas disponen de una tecnología F, que al combinar trabajo con capital, tomando como dado el nivel de productividad constante en el tiempo, z, les permite producir bienes finales.[2]
- Todas las firmas son idénticas. Esto nos permite hablar de una "firma representativa".
- Dada una secuencia de precios, $\{p_t, w_t, r_t\}_{t=0}^{T}$ el problema que enfrenta la firma representativa es escoger la demanda de insumos y la oferta de bienes finales, tales que maximice el flujo descontado de utilidades netas:

$$\max_{\{y_t, k_t^d, l_t^d\}_{t=0}^{T}} \pi = \sum_{t=0}^{T} p_t \left[y_t - r_t k_t^d - w_t l_t^d \right]$$

  sujeto a:

$$y_t \leq F(k_t^d, l_t^d), \forall t$$

2.4. El Problema de los Individuos

- La economía está habitada por un gran número de individuos idénticos (sus preferencias son idénticas entre sí). El número de individuos en la economía no crece. De manera paralela al caso de las firmas, podemos hablar de un "individuo representativo" o de los individuos indistintamente. Las preferencias están descritas por la función de utilidad instantánea u, que suponemos es contínuamente diferenciable y creciente en c_t y o_t y estrictamente cóncava. Adicionalmente, $\lim_{c \to 0} u_c(c, o) = \infty$. Posteriormente será más claro por qué imponemos estos supuestos.
- Dada la misma secuencia de precios que enfrentan las firmas, $\{p_t, w_t, r_t\}_{t=0}^{T}$, el individuo representativo escoge una secuencia de demandas de consumo e inversión y una secuencia de ofertas de capital y trabajo, dado un stock de capital inicial, que es de su propiedad.

[1] Los agentes económicos se encuentran en el mercado al comienzo de cada período. En el período t, los individuos y las firmas transan: servicios laborales por un período, servicios de capital (el disponible al comienzo del período) por un período e intercambian el bien final. Adicionalmente los agentes transan un activo financiero: un derecho a una unidad de producto final en el período subsiguiente.

[2] $F : R_+^2 \to R$ y es contínuamente diferenciable, monótonamente creciente y cóncava en k y l por separado. Adicionalmente, F es homogénea de grado 1. Si no se emplea alguno de los insumos no se produce: $F(0, 0) = F(0, L) = F(k, 0) = 0$. $F_k > 0$ y $F_l > 0\ \forall k, l > 0$. Finalmente, las condiciones de Inada: $\lim_{k \to 0} F_k(k, 1) = \infty$ y $\lim_{k \to \infty} F_k(k, 1) = 0$.

- Con respecto a la decisión de inversión y su relación con el stock de capital es importante especificar la secuencia de eventos involucrada en la elección del individuo, ya que la decisión de inversión implica una elección del stock de capital disponible para el siguiente período (y viceversa). Al comienzo del período t el stock de capital es propiedad del individuo, éste escoge cuánto invertir, lo que determina el stock de capital disponible para el período siguiente. De otra forma, dado el stock de capital inicial, el inviduo puede verse como esogiendo el stock de capital para el período siguiente, determinando así la inversión. Lógicamente si el capital se deprecia, estos cálculos involucran tener en cuenta el capital depreciado durante el período t.

- Vamos a denotar el stock de capital que es propiedad del individuo al comienzo del período como κ_t y el stock de capital que el inviduo ofrece a las firmas para arrendarlo como k_t^s. Es claro que en todo momento del tiempo: $0 \leq k_t^s \leq \kappa_t$.

- El individuo puede asignar el tiempo disponible entre trabajo y ocio, de tal forma que: $0 \leq o_t + l_t^s \leq 1$.

- Más formalmente, dada la misma secuencia de precios que enfrentan las firmas $\{p_t, w_t, r_t\}_{t=0}^T$, el individuo escoge una secuencia $\{c_t, x_t, \kappa_{t+1}, k_t^s, l_t^s\}_{t=0}^T$ para maximizar el valor presente del flujo descontado de su felicidad (utilidad) sujeto a las restricciones de presupuesto, tiempo y propiedad:

$$\max_{\{c_t, x_t, \kappa_{t+1}, k_t^s, l_t^s\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, o_t)$$

  sujeto a:

$$\sum_{t=0}^T p_t \left[c_t + x_t\right] \leq \sum_{t=0}^T p_t \left[r_t k_t^s + w_t l_t^s\right] + \pi$$

$$\kappa_{t+1} = (1-\delta)\kappa_t + x_t, \forall t$$

$$0 < o_t + l_t^s = 1, \forall t$$

$$0 \leq k_t^s \leq \kappa_t, \forall t$$

$$c_t \geq 0 \text{ y } \kappa_{t+1} \geq 0 \text{ ambas } \forall t$$

$$\kappa_0 \text{ dado}$$

- Nótese que el stock de capital ofrecido a las firmas y el stock de capital de propiedad del individuo deben ser no-negativos. Sin embargo la inversión sí puede ser negativa (es decir, la inversión es reversible).

- Ahora caracterizamos el equilibrio competitivo.

2.5. Equilibrio Competitivo

2.5.1. Definición de Equilibrio Competitivo

- Un equilibrio competitivo es una secuencia de precios $\{p_t, w_t, r_t\}_{t=0}^T$, una secuencia de cantidades para la firma representativa $\{y_t, k_t^d, l_t^d\}_{t=0}^T$, una secuencia de cantidades para el individuo representativo $\{c_t, x_t, \kappa_{t+1}, k_t^s, l_t^s\}_{t=0}^T$ tales que:

  1. $\{y_t, k_t^d, l_t^d\}_{t=0}^T$ resuelve el problema de la firma, dada la secuencia de precios.
  2. $\{c_t, x_t, \kappa_{t+1}, k_t^s, l_t^s\}_{t=0}^T$ resuelve el problema del individuo representativo, dada la secuencia de precios.
  3. todos los mercados se equilibran: $k_t^s = k_t^d$, $l_t^s = l_t^d$ y $c_t + x_t = y_t$ en todo momento del tiempo.

2.5.2. Caracterización del Equilibrio Competitivo

- Antes de formalizar la solución de equilibrio competitivo del modelo macroeconómico, podemos empezar especulando un poco acerca de la naturaleza de la solución.

- Como las preferencias son estrictamente monótonas entonces $p_t > 0, \forall t$. Adicionalmente, como los retornos marginales de los factores de producción son positivos, $w_t > 0, \forall t$ y $r_t > 0, \forall t$. Como todos los mercados se equilibran, entonces $k_t = k_t^s = k_t^d, \forall t$ y $l_t = l_t^s = l_t^d, \forall t$ denotan las cantidades transadas de capital y trabajo.

- Consideremos la firma representativa. Si $p_t > 0, \forall t$, entonces cada período la firma ofrecerá al mercado todo el resultado de su producción, es decir, $y_t = F(k_t, l_t), \forall t$. Adicionalmente y como habíamos mencionado antes, dado que cada período la firma sólo arrienda el capital y paga servicios laborales, su problema puede expresarse como un problema estático en el que las firmas maximizan utilidades período a período:

$$\max_{k_t, l_t} p_t \left[F(k_t, l_t) - r_t k_t - w_t l_t\right], \forall t \tag{1}$$

- Las condiciones de primer orden son:

$$r_t = F_k(k_t, l_t), \forall t$$
$$w_t = F_l(k_t, l_t), \forall t$$

- Este resultado combinado con el hecho de que hemos supuesto que F es homogénea de grado uno, implica que $\pi = 0$.

- Ahora consideremos el caso del individuo representativo. Dado que ofrecer capital no le genera desutilidad al individuo, en todos los períodos el individuo ofrecerá todo su capital disponible al comienzo del período. Esto es $\kappa_t = k_t, \forall t$.

- Vale la pena reflexionar sobre el stock de capital final. Preguntémonos: ¿Qué valor debe tomar k_{T+1}? Después de T, la vida termina, y en consecuencia no hace sentido tener $k_{T+1} > 0$. Dado que $k_{T+1} \not< 0$, por la restricción impuesta anteriormente, entonces tiene que ser el caso que: $k_{T+1} = 0$. Esta es una "condición de transversalidad" para el caso de horizonte de vida finito.[3]

- En estas circunstancias, el problema del individuo representativo puede escribirse como:

$$\max_{\{c_t, x_t, k_t, l_t\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t, 1 - l_t) \tag{2}$$

sujeto a:

$$\sum_{t=0}^{T} p_t \left[c_t + x_t\right] \leq \sum_{t=0}^{T} p_t \left[r_t k_t + w_t l_t\right] \tag{3}$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + x_t, \forall t \tag{4}$$

$$c_t \geq 0, k_{t+1} \geq 0, \forall t \tag{5}$$

$$k_0 = \kappa_0 \text{ dado.}$$

- Nótese que al reescribir el problema del individuo representativo de esta forma, la cantidad de implicaciones que estamos empleando.

- Ahora, dado que $\lim_{c \to 0} u_c(c, o) = \infty$, la restricción de no-negatividad del consumo nuncará está activa (es decir, el consumo nunca será cero). ¿Por qué?

[3]Una discusión más detallada acerca de la condición de transversalidad se encuentra en Riascos (2005).

- Construimos el Lagrangiano:

$$L = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t, 1 - l_t) + \lambda \left[\sum_{t=0}^{T} p_t \left[r_t k_t + w_t l_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) k_t \right] \right]$$

- En consecuencia las condiciones de primer orden (condiciones de Kuhn-Tucker) para el individuo representativo son:

$$\beta^t u_c(c_t, 1 - l_t) - \lambda p_t = 0 \tag{6}$$

$$-\beta^t u_l(c_t, 1 - l_t) + \lambda p_t w_t = 0 \tag{7}$$

$$\lambda \left[(r_{t+1} + 1 - \delta) p_{t+1} - p_t \right] = 0 \tag{8}$$

$$\lambda \left[\sum_{t=0}^{T} p_t \left[r_t k_t + w_t l_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) k_t \right] \right] = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

  donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestal. Las ecuaciones anteriores se cumplen en todo momento del tiempo.

- Antes de re-definir el equilibrio competitivo es conveniente analizar algunas características de las decisiones del individuo representativo.

- La ecuación (6) en conjunción con la ecuación (8) implican que, en una senda óptima, la utilidad marginal del consumo presente (en el momento t), debe ser igual a la utilidad marginal del consumo futuro (en el momento $t+1$) compensada por el retorno real neto de depreciación y descontando subjetivamente su valor empleando el factor β.

- La ecuación (7) en conjunción con la ecuación (6) indican que, en una senda óptima, el salario es igual a la tasa marginal de sustitución del trabajo por consumo. Hay un trade-off entre consumo y ocio: el hogar puede trabajar más (descansar menos) y usar el ingreso laboral para consumir más. Esta ecuación define la oferta de trabajo, para un nivel de consumo dado.

- Finalmente, las ecuaciones (7) y (8) muestran que existe un trade-off intertemporal entre trabajo presente y trabajo futuro. Nótemos que $u_c = u_l / w$. En consecuencia:

$$\frac{u_{l_{t+1}}(c_{t+1}, 1 - l_{t+1})}{u_{l_t}(c_t, 1 - l_t)} = \frac{w_{t+1}}{\beta w_t (1 + r_{t+1} - \delta)}$$

  es decir, que la oferta de trabajo también depende del salario futuro y de la tasa de interés. Para una tasa de interés dada, un aumento en el salario corriente, w_t, relativo al salario futuro, w_{t+1}, debe aumentar la oferta de trabajo en el período corriente relativamente con respecto a la oferta de trabajo futuro. ¿Por qué?

- La tasa de interés también juega un papel importante en la determinación de la oferta de trabajo. Un aumento de la tasa de interés futura, dado el salario intertemporal relativo, induce un aumento de la oferta de trabajo. ¿Por qué?

- En consecuencia, un *equilibrio competitivo* está caracterizado por unas secuencias de precios $\{\widetilde{p}_t, \widetilde{w}_t, \widetilde{r}_t\}_{t=0}^{T}$ y cantidades $\left\{\widetilde{c}_t, \widetilde{l}_t, \widetilde{k}_{t+1}\right\}_{t=0}^{T}$ todas positivas tales que las firmas maximizan beneficios, es decir, resuelven el problema (1), y los individuos maximizan la utilidad sujetos a sus restricciones, es decir, resuelven el problema (2)-(5), y adicionalmente la oferta agregada es igual a la demanda agregada $F(\widetilde{k}_t, \widetilde{l}_t) = \widetilde{c}_t + \widetilde{k}_{t+1} - (1-\delta)\widetilde{k}_t, \forall t$.

- En la siguiente sección simplificamos nuestra notación (eliminando los superíndices s para la oferta y d para la demanda) ya que será evidente quienes ofrecen y quienes demandan qué bienes y servicios.

3. Una Economía Estocástica

- La principal diferencia con el caso determinístico es que ahora la economía enfrenta incetidumbre.
- Adicionalmente, el horizonte de vida lo suponemos infinito e introducimos el gobierno. Éste cobra impuestos y realiza gasto improductivo (por ejemplo, durante el período t abre huecos para taparlos durante el mismo período). Dicho gasto es exógeno y estocástico (puede depender de la voluntad política del gobernante de turno, la cuál desconocemos exactamente). En consecuencia, el gasto es una fuente de incertidumbre en la economía.
- La otra fuente de incertidumbre es el nivel de productividad agregado de la economía.

3.1. Firmas

- Al igual que en el caso anterior, en la economía existe un número grande de firmas que operan en un ambiente de competencia perfecta. Todas las firmas disponen de una tecnología F, que al combinar trabajo, l, con capital, k, tomando como dado el nivel de productividad, z_t, les permite producir bienes finales que venden al precio p_t.
- Nuestra fuente de incertidumbre en la economía es es nivel *futuro* de productividad agregado. Los agentes conocen el nivel de productividad al comienzo del período t, z_t, pero desconocen cuál será su nivel en el período siguiente, z_{t+1}. Una manera de formalizar esta idea es diciendo que la productividad evoluciona en el tiempo de manera exógena:

$$z_{t+1} = \rho z_t + \epsilon^z_{t+1}$$

  donde $\rho_z \in (0,1)$ y ϵ^z es una variable aleatoria que se distribuye normal, con media cero y desviación estándar σ_{ϵ^z}.
- Los agentes en esta economía conocen la distribución de ϵ^z, pero desconocen sus realizaciones. El valor de ϵ^z_{t+1} es desconocido en el momento t.
- En estas circunstancias, la producción (oferta agregada) de bienes finales es:

$$y_t = \exp(z_t)F(k_t, l_t)$$

- Los precios de los insumos (trabajo y capital), w_t y r_t, y del bien final, p_t, están dados para todas las firma.
- El problema de la firma representativa es escoger capital y trabajo de tal forma que se maximicen los beneficios de las fimas. Este problema lo enfrenta en todo momento del tiempo:

$$\max_{k_t, l_t} p_t \left[\exp(z_t)F(k_t, l_t) - r_t k_t - w_t l_t\right], \forall t \tag{9}$$

- Las condiciones optimalidad son:

$$r_t = \exp(z_t)F_k(k_t, l_t) \tag{10}$$

$$w_t = \exp(z_t)F_l(k_t, l_t) \tag{11}$$

- Que indican que, en el óptimo, el rendimiento marginal del capital es igual a la tasa de interés real y el rendimiento marginal del trabajo es igual al salario real. Ambas condiciones se deben cumplir en todo momento del tiempo.
- Nótese que los precios de los insumos dependen del stock de capital y del trabajo agregado.

3.2. Individuos

- La economía está habitada por un gran número de individuos idénticos (sus preferencias son idénticas entre sí). El número de individuos en la economía no crece. De manera paralela al caso de las firmas, podemos hablar de un individuo representativo o de los individuos indistintamente.[4]

- Suponemos que el individuo representativo tiene un horizonte de vida infinito[5] y sus preferencias están definidas sobre el consumo en todos los períodos del tiempo. También suponemos que dichas preferencias son aditivamente separables:

$$U(c_0, c_1, ...) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}, o_{t+j})$$

  donde $\beta \in (0,1)$, c_t es el consumo de bienes finales durante el período t y o_t es el tiempo de ocio durante el período t.[6]

- Una de las restricciones de los individuos es que deben asignar el tiempo entre trabajar, l_t, y descansar, o_t. Normalizando el tiempo en una unidad esta restricción es: $o_t + l_t = 1$.

- Los individuos ofrecen trabajo, l_t, tomando como dado el salario real, w_t. También son dueños del stock de capital inicial de la economía, k_0, y lo aumentan (disminuyen) invirtiendo (desinvirtiendo). Los individuos le arriendan dicho stock de capital a las firmas a una tasa de interés real dada, r_t.

- La restricción de presupuesto en cualquier período t es:

$$c_t + (k_{t+1} - k_t) + \delta k_t + t_t \leq w_t l_t + r_t k_t$$

  donde δ es la tasa de depreciación del capital y t_t son los impuestos (netos de transferencias).

- La restricción de presupuesto muestra, del lado izquierdo los gastos y del lado derecho los ingresos. Los gastos no pueden exceder los ingresos y son las compras de bienes finales, la acumulación de capital, reconociendo que el capital se deprecia durante el período t y los pagos de impuestos. Los ingresos son los ingresos laborales laborales y la renta del capital.

- El problema del individuo respresentativo es escoger las secuencias de $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{l_t\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de tal forma que maximicen el valor *esperado* del flujo futuro y presente de utilidades, sujeto a la restricción presupuestal, la restricción de tiempo y tomando como dado el stock de capital inicial.

- Nótese que existe incertidumbre acerca de la productividad del individuo representativo (porque la variable z_t afecta el producto marginal del trabajo y del capital). El individuo tomará toda la información disponible en el momento de su decisión para formar sus expectativas.

- Definimos E_t como el operador de valor esperado, condicionado a la información disponible en el momento t.

- Más formalmente el problema del individuo representativo en el momento del tiempo t es:

$$\text{máx}\, E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}, 1 - l_{t+j}) \right\} \tag{12}$$

  s.a

$$c_t + (k_{t+1} - k_t) + \delta k_t + t_t \leq w_t l_t + r_t k_t \ , \forall t$$

$$k_0 \text{ dado}$$

[4] Nótese que estamos abstrayendo de cualquier consideración acerca de la distribución del ingreso o la riqueza, y nos concentramos en la forma como se determinan las asignaciones eficientes.

[5] Esto es una simplificación técnica. Una forma alternativa de pensar este supuesto, es que los individuos se preocupan por sus hijos, los hijos de sus hijos, los hijos de los hijos de sus hijos, y así sucesivamente.

[6] u es contínuamente diferenciable y creciente en c_t y o_t y estrictamente cóncava. Adicionalmente, $\text{lím}_{c\to 0} u_c(c, o) = \infty$.

- Hay diversas formas de obtener las condiciones de optimalidad del problema (12). Una de estas formas es construir el Lagrangiano (conocido a veces también como Hamiltoniano) y optimizar con respecto a las variables de decisión. Esto es:

$$L = E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \beta^j u(c_{t+j}, 1 - l_{t+j}) + \Lambda_{t+j} \left(w_{t+j} l_{t+j} + r_{t+j} k_{t+j} + (1-\delta) k_{t+j} - c_{t+j} - t_{t+j} - k_{t+1+j} \right) \right\} \right] \quad (13)$$

donde Λ_t es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de presupuesto en el momento t.

- Las condiciones de optimalidad (con respecto a c_t, l_t y k_{t+1}) son:

$$E_t \left[u_c(c_{t+j}, 1 - l_{t+j}) - \lambda_{t+j} \right] = 0 \quad (14)$$

$$E_t \left[-u_l(c_{t+j}, 1 - l_{t+j}) + w_{t+j} \lambda_{t+j} \right] = 0 \quad (15)$$

$$E_t \left[-\lambda_{t+j} + \beta \left[\lambda_{t+1+j} \left(1 + r_{t+1+j} - \delta \right) \right] \right] = 0 \quad (16)$$

donde hemos definido $\lambda_t \equiv \frac{\Lambda_t}{\beta^t}$.

- Hay infinitas secuencias que satisfacen (14)-(16). Sin embargo, sólo hay una que tiene sentido económico: aquella que no permite acumular capital indefinidamente en el tiempo. Por lo anterior, en adición a las condiciones (14)-(16) imponemos una *condición de transversalidad* que indica la visión optimizadora de largo plazo de los agentes:

$$\lim_{j \to \infty} E_t \left[\beta^j \lambda_{t+j} k_{t+j+1} \right] = 0. \quad (17)$$

- Esta condición es similar a la que teníamos en el modelo determinístico: hacia el final de los tiempos el valor esperado del capital (en útiles) es cero y no será acumulado infinitamente.

- Bajo los supuestos que hemos impuesto, estas cuatro ecuaciones juntas son necesarias y suficientes para un óptimo. Entonces, éstas definen la escogencia del individuo representativo en el momento t de unas secuencias de c_t, l_t, k_{t+1} en respuesta a w_t, r_t y el capital acumulado k_t.

- Puede mostrarse que en una senda óptima, la utilidad marginal del consumo presente (en el momento t), debe ser igual a la utilidad marginal esperada del consumo futuro (en el momento $t+1$) compensada por el retorno real neto de depreciación y descontando subjetivamente su valor empleando el factor β.

- Nótese que esta ecuación indica que el trade-off entre consumo presente y futuro depende también de la interacción entre la tasa de interés futura y el consumo futuro (es decir, de su covarianza).

- La segunda ecuación indica que, en el óptimo, el salario es igual a la tasa marginal de sustitución del trabajo por consumo. Hay un trade-off entre consumo y ocio: el hogar puede trabajar más (descansar menos) y usar el ingreso laboral para consumir más. Esta ecuación define la oferta de trabajo, para un nivel de consumo dado.

- Finalmente, ambas ecuaciones definen implícitamente un trade-off intertemporal entre trabajo presente y trabajo futuro. Nótemos que $u_c = u_l / w$. En consecuencia:

$$u_l(c_t, 1 - l_t) = \beta E_t \left[\frac{w_t}{w_{t+1}} u_{l_{t+1}}(c_{t+1}, 1 - l_{t+1}) \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$$

que en su versión determinística implica que:

$$\frac{u_{l_{t+1}}(c_{t+1}, 1 - l_{t+1})}{u_{l_t}(c_t, 1 - l_t)} = \frac{w_{t+1}}{\beta w_t (1 + r_{t+1})}$$

es decir, que la oferta de trabajo también depende del salario futuro y de la tasa de interés. Para una tasa de interés dada, un aumento en el salario corriente, w_t, relativo al salario futuro, w_{t+1}, debe aumentar la oferta de trabajo en el período corriente relativamente con respecto a la oferta de trabajo futuro. ¿Por qué?

- La tasa de interés también juega un papel importante en la determinación de la oferta de trabajo. Un aumento de la tasa de interés futura, dado el salario intertemporal relativo, induce un aumento de la oferta de trabajo. ¿Por qué?

3.3. Gobierno

- La forma como introducimos el gobierno en este modelo es bastante simple: cobra impuestos de suma fija (en unidades del bien final) a todos los individuos por igual, t_t, y realiza gasto improductivo (en unidades del bien final), g_t.
- Dicho gasto es una variable exógena aleatoria. Podemos pensar en una situación en la cual el gobierno no puede controlar sus gastos. Éstos son entonces nuestra segunda fuente de incertidumbre en la economía. Los agentes conocen el nivel de gasto al comienzo del período t, g_t, pero desconocen cuál será su nivel en el período siguiente, g_{t+1}. Esto es:
$$g_{t+1} = \rho_g g_t + \epsilon_{t+1}^g$$
donde $\rho_g \in (0,1)$ y ϵ^g es una variable aleatoria que se distribuye normal, con media cero y desviación estándar σ_{ϵ^g}.
- Al igual que en el caso de la productividad, los agentes en esta economía conocen la distribución de ϵ^g, pero desconocen sus realizaciones. El valor de ϵ_{t+1}^g es desconocido.
- El balance del gobierno es simplemente:
$$g_t = t_t \ , \forall t \tag{18}$$
- Nótese que el presupuesto está balanceado en todo momento del tiempo. El déficit fiscal primario (la diferencia entre ingresos y gastos) es cero.

3.4. Equilibrio General Competitivo

- Ya hemos descrito el problema de los diferentes agentes de la economía: el individuo representativo, la firma representativa y el gobierno.
- Definimos un *sistema de precios* como una secuencia $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$. Tomando como exógenas las secuencias $\{z_t, g_t\}_{t=0}^{\infty}$, y como dado k_0, un *equilibrio* es un sistema de precios y una secuencia de cantidades $\{c_t, l_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ tales que:
  1. dado el sistema de precios y los impuestos $\{t_t\}_{t=0}^{\infty}$, los individuos maximizan su utilidad esperada sujetos a sus restrcciones de presupuesto y tiempo. Es decir, resuelven el problema (12).
  2. las firmas maximizan beneficios en todo momento del tiempo. Es decir, resuelven el problema (9).
  3. el gobierno mantiene un presupuesto balanceado. Es decir, la ecuación (18) se cumple en todo momento del tiempo.
  4. la oferta agregada es igual a la demanda agregada: $y_t = c_t + x_t + g_t$.
- Adicionalmente suponemos *expectativas racionales*. Esto significa que en este modelo, la esperanza condicional en las ecuaciones (14)-(17) son calculadas por los agentes basándose en distribuciones de probabilidad que coinciden con aquellas que son implicadas por la estructura de la economía (representada por el modelo).
- En consecuencia, nuestra definición de equilibrio competitivo de expectativas racionales implica que el sistema de precios y las secuencias de cantidades deben cumplir las siguientes condiciones:

$$u_c(c_t, 1-l_t) = \beta E_t \left[u_{c_{t+1}}(c_{t+1}, 1-l_{t+1}) \left(1 + r_{t+1} - \delta\right) \right] \tag{19}$$
$$w_t = \frac{u_l(c_t, 1-l_t)}{u_c(c_t, 1-l_t)} \tag{20}$$
$$r_t = \exp(z_t) F_k(k_t, l_t) \tag{21}$$
$$w_t = \exp(z_t) F_l(k_t, l_t) \tag{22}$$
$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + x_t \tag{23}$$
$$\exp(z_t) F(k_t, l_t) = c_t + x_t + g_t \tag{24}$$

- Las ecuaciones (19)-(24) es un sistema de 6 ecuaciones en 6 incógnitas: c_t, x_t, k_t, l_t, r_t y w_t. Si adicionamos las variables z_t y g_t debemos incluir sus respectivas ecuaciones y tendremos un sistema de 8 ecuaciones en 8 incógnitas.
- Nótese que podemos comprimir las ecuaciones anteriores en una sóla:

$$E_t \left[f\left(s_{t+1}, s_t\right) \right] = 0$$

donde $s_t = (c_t, x_t, k_t, l_t, r_t, w_t, z_t, g_t)$.

- Dado que u y F son no-lineales, f también es no lineal. Nuestra caracterización del equilibrio, es (matemáticamente) un sistema de ecuaciones en diferencias, no-lineal y estocástico. Estos problemas son difíciles de resolver y en la mayoría de los casos los economistas recurrimos a aproximaciones alrededor de una situación específica de la economía.
- Típicamente esta situación es el estado estacionario determinístico.
- Antes de proceder con las diversas formas de solucionar este problema, es conveniente detenerse a analizar un problema que conduce a exactamente las mismas asignaciones de equilibrio que el equilibrio general competitivo.

4. El Planificador Central

- Ahora en lugar de pensar en una economía descentralizada, pensemos en una economía comunista, pero poblada por los mismos individuos.
- Hay un "planificador central" que busca maximizar la utilidad esperada del individuo representativo. Este planificador dispone de la misma tecnología F y parte con el mismo stock de capital inicial k_0.
- La naturaleza de la incertidumbre es la misma en la economía anterior como en esta. La productividad y el gasto son variables aleatorias exógenas.
- Nos preguntamos: ¿Cómo son las asignaciones óptimas en la economía centralizada con respecto a aquellas de la economía descentralizada?

4.1. El Problema del Planificador

- Evaluemos entonces las restricciones del planificador central. El planificador central sabe que el individuo representativo dispone de una unidad de tiempo para trabajar o descansar, luego la restricción de tiempo es la misma: $o_t + l_t = 1$.
- La restricción de recursos la analizamos por partes. Primero, el máximo de producción de bienes finales que puede producir empleando k_t unidades de capital y l_t unidades de producto, dado el nivel de productividad, es $\exp(z_t)F(k_t, l_t)$. Esto se lo puede gastar en consumo, c_t, en inversión $x_t = (k_{t+1} - k_t) + \delta k_t$, o en gasto improductivo, g_t. Luego la restricción de recursos es:

$$c_t + x_t + g_t \leq \exp(z_t)F(k_t, l_t)$$

- En consecuencia el problema del planificador central es:

$$\text{máx}\, E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}, 1 - l_{t+j}) \right\}$$

s.a

$$c_t + (k_{t+1} - k_t) + \delta k_t + g_t \leq \exp(z_t)F(k_t, l_t)$$
$$k_0 \text{ dado}$$

- Construimos el lagrangiano:

$$L = E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \beta^j u(c_{t+j}, 1 - l_{t+j}) + \Lambda_{t+j} \left(\exp(z_{t+j}) F(k_{t+j}, l_{t+j}) + (1-\delta) k_{t+j} - c_{t+j} - g_{t+j} - k_{t+j+1} \right) \right\} \right]$$

donde Λ_t es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de recursos del momento t.

- Las condiciones de optimalidad del planificador central implican (ignorando el subíndice j):

$$u_c(c_t, 1 - l_t) = \beta E_t \left[u_{c_{t+1}}(c_{t+1}, 1 - l_{t+1}) \left(1 + \exp(z_{t+1}) F_k(k_{t+1}, l_{t+1}) - \delta \right) \right] \tag{25}$$

$$\exp(z_t) F_l(k_t, l_t) = \frac{u_l(c_t, 1 - l_t)}{u_c(c_t, 1 - l_t)} \tag{26}$$

$$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + x_t \tag{27}$$

$$\exp(z_t) F(k_t, l_t) = c_t + x_t + g_t \tag{28}$$

- La ecuación (25) indica que el planificador central debe asignar el consumo intertemporalmente de tal forma que la utilidad marginal del consumo presente sea igual a la utilidad marginal del consumo futuro descontando con el factor β. Nótese que en este caso, ahorrar una unidad de consumo hoy aumenta el consumo futuro en el rendimiento marginal del capital.

- La ecuación (26) indica que el planificador central debe asignar el tiempo dedicado al trabajo de tal forma que el producto marginal del trabajo sea igual a la tasa marginal de sustitución del trabajo por consumo del individuo representativo.

- Las ecuaciones (25)-(28) es un sistema de 4 ecuaciones en 4 incógnitas: c_t, x_t, k_t y l_t.

4.2. Equivalencia de Soluciones

- Es fácil verificar que las ecuaciones (19)-(24) son equivalentes a las ecuaciones (25)-(28). [Tarea]

- Esto indica que, en el caso de nuestro modelo básico, las asignaciones óptimas de una economía descentralizada son equivalentes a las asignaciones óptimas de un planificador central.

- Este resultado no es otra cosa que la aplicación del Primer y Segundo Teorema del Bienestar de la Teoría Microeconómica.

- Usando el Primer Teorema del Bienestar podemos concluir que cualquier asignación que corresponda al equilibrio competitivo es una asignación óptima en el sentido de Pareto. Como solo hay una asignación que es óptima en el sentido de Pareto, *si existe* el equilibrio competitivo, entonces esa es la solución al problema del planificador central.

- Una forma de establecer la existencia del equilibrio competitivo es empleando el Segundo Teorema del Bienestar para caracterizar la solución del planificador como un equilibrio competitivo. Ver Cooley y Prescott (1995, [1])

- Podría pensarse que si uno tiene un modelo cualquiera y plantea y resuelve el problema del planificador central (que es un problema más sencillo) estaría resolviendo para el equilibrio competitivo de la misma economía (que es un problema más complejo).

- Sin embargo, este no es el caso. La equivalencia entre la solución del planificador central y la del equilibrio competitivo se rompe cuando:

    - hay agentes heterogéneos

- hay distorsiones (impuestos distorsivos, por ejemplo)
- hay externalidades
- restricciones de liquidez, endeudamiento y de “dinero por anticipado”
- estructuras de mercado diferentes a competencia perfecta

- En conclusión el alcance de la equivalencia entre solución del planificador central y el equilibrio competitivo es bastante limitado.
- En general, la solución del planificador central se emplea para fines didácticos e ilustrativos, pero en la modelación práctica no tiene mucha acogida.

5. Estado Estacionario Determinístico

- Ya vimos como las ecuaciones (19)-(24) pueden escribirse como:

$$E_t\left[f\left(s_{t+1}, s_t\right)\right] = 0$$

- El “estado estacionario” del sistema es una situación en la cual $s_{t+1} = s_t = s$, entonces:

$$f(s, s) = 0$$

- Al eliminar el valor esperado, estamos diciendo que nos interesa estudiar una situación en la cual las variables exógenas se mantienen en su valor promedio para siempre. Hemos eliminado la incertidumbre y por eso nos referimos el estado estacionario determinístico.
- En nuestro modelo el estado estacionario determinísitco implica que:

$$1 = \beta\left[1 + F_k(k, l) - \delta\right]$$

$$F_l(k, l) = \frac{u_l(c, 1-l)}{u_c(c, 1-l)}$$

$$x = \delta k$$

$$F(k, l) = c + x$$

- Hemos utilizado el hecho que la media de z_t y la media de g_t son cero.
- Para entender la primera ecuación digamos que $\beta \equiv \frac{1}{1+\rho}$, donde ρ es la tasa subjetiva de descuento. Esto implica que, en estado estacionario, debe cumplirse que $\rho = F_k(k, l) - \delta$. Dado que ρ y δ son parámetros, podemos observar que: dada una tasa de depreciación, una tasa de descuento más alta (un factor de descuento más bajo) implica un stock de capital de estado estacionario más bajo, dado todo lo demás constante. ¿Por qué?
- No es de sorprenderse por qué sociedades conformadas por individuos con una alta preferencia por el consumo presente (tasas de descuento altas) tienen stocks de capital físico más bajos.

6. Calibración

- La descripción del entorno económico y del concepto de equilibrio nos proporcionan un marco analítico para el estudio de los ciclos económicos. La pregunta es si el modelo descrito anteriormente puede emplearse para describir los ciclos económicos. El marco empleado es consistente con muchos otros procesos de las variables de equilibrio que son de nuestro interés, como consumo, inversión, producto, salarios, tasas de interés, etc.
- El proceso de calibración involucra tres pasos:
  1. Restringir los procesos a una clase paramétrica. Esto es, emplear formas funcionales específicas para describir la tecnología, función de utilidad, etc.
  2. Construcción de "medidas" consistentes con el modelo. Esto es, establecer una correspondencia entre los datos de la economía observada y la economía del modelo.
  3. Asignar valores a los parámetros del modelo.
- Esta estrategia para asignar valores numéricos a los parámetros emplea intensamente la teoría económica como un fundamento para restringir nuestro marco general y establecer una correspondencia con los datos. Para cada modelo existirá una correspondencia diferente con los datos.

6.1. Restringir los procesos a una clase paramétrica

- Hay muchas razones para pensar que la tecnología puede ser descrita como una función de producción Cobb-Douglas:
$$y_t = \exp(z_t) k_t^{\alpha} l_t^{(1-\alpha)}$$
- Las preferencias de los individuos pueden ser descritas como una familia paramétrica de funciones de la clase:
$$u(c_t, l_t) = \frac{\left(c_t^{(1-\theta)} o_t^{\theta}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$
donde $\frac{1}{\sigma}$ es la elasticidad de sustitución intertemporal y θ es la participación del ocio dentro del bien compuesto (consumo-ocio).
- El parámetro σ es difícil de determinar porque cambios en su valor afectan la transición hacia el equilibrio de largo plazo (balanced growth path) pero afectan las sendas como tal. Cuando $\sigma \to 1$, tenemos:
$$u(c_t, o_t) = (1-\theta) \log c_t + \theta \log o_t.$$
- En el caso especial en el que el trabajo es "indivisible", Hansen (1985) demostró que las preferencias son de la forma:
$$u(c_t, o_t) = \log c_t + B o_t.$$

6.2. Construcción de "medidas" consistentes con el modelo

- Buscamos saber si el modelo descrito anteriormente puede emplearse para describir los ciclos económicos. Para hacerlo se comparan los momentos y propiedades estadísticas de las variables simuladas en el modelo y las variables observadas en la economía. Para ello los datos de la economía observada deben ser consistentes con los datos de la economía modelo. Es necesario hacer algunas modificaciones a los datos observados para que sean equivalentes conceptualmente con el modelo.
- En nuestro modelo el consumo se define como la adquisición y de bienes y servicios para su utilización instantánea. Dentro de las estadísticas observadas, sin embargo, el consumo privado y público incluye consumo de bienes durables. Los bienes durables son aquellos que permiten diferir su utilización en el tiempo. Por lo tanto no corresponden al concepto de consumo definido en el modelo.

- El consumo de bienes durables se considera como parte de la inversión. La inversión se define como los recursos utilizados para el futuro incremento de la producción: maquinaria, construcción etc. Y se incluye el consumo de durables por su utilización a lo largo de varios periódos de tiempo.
- El gasto del gobierno en el modelo es un consumo improductivo. Debemos compararlo entonces con datos del consumo del gobierno. La inversión que hace el gobierno debería agregarse a la inversión total, no al gasto del gobierno.
- El modelo es de una economía cerrada. Sin embargo la gran mayoría de economías del mundo son abiertas al comercio y a los flujos de capitales internacionales. Para ser comparables, los datos observados deben ser adaptados para simular una economía cerrada. Para economías como la colombiana las importaciones son principalmente de maquinaria y bienes de capital, lo que permite asociarlas con la inversión. Las exportaciones son de bienes de consumo, por lo que podríamos agregarlas al consumo. Alternativamente podemos desarrollar un modelo para economía abierta. Pero siguiendo a Cooley y Prescott (1995 [1]) podemos también considerar las exportaciones netas como adiciones o disminuciones en el capital de la economía, según el signo que presenten.
- Una vez construídas estas medidas consistentes podemos comparar los momentos y propiedades estadísticas y valorar el poder explicativo del modelo respecto al ciclo económico observado.

6.3. Asignar valores a los parámetros del modelo

- Una vez restringidos los procesos del modelo a una clase paramétrica debemos asignar valores a los parámetros asociados a las formas funcionales escogidas. Este proceso requiere la utilización intensa de la teoría económica para poder relacionar las medidas consistentes construídas anteriormente con las formas funcionales y la solución del modelo.
- Existen relaciones que en la economía son persistentes a lo largo del tiempo. Por ejemplo, la participación del consumo de los hogares en el PIB, el porcentaje de horas trabajadas respecto al total de horas, la participación de la remuneración al factor trabajo en el PIB entre muchas otras se mantienen más o menos constantes a lo largo del tiempo. Estos hechos estilizados, junto con nuestra definición de estado estacionario, serán las que permiten asignar valores a los parámetros del modelo.
- Dadas las formas funcionales pueden hallarse las razones y relaciones en estado estacionario y asignar valores a los parámetros tal que reproduzcan las relaciones observadas en la economía.
- Por ejemplo, si la tecnología se modela a través de una función Cobb-Douglas debe determinarse entonces el valor del parámetro α. La teoría económica y el modelo nos dicen que $1 - \alpha = \frac{wl}{y}$, es la participación de la remuneración al factor trabajo respecto al total de la producción. Diversos estudios encuentran que esa participación es cercana a dos terceras partes, lo que implica un valor $\alpha = 0{,}33$.

7. Aplicación: El modelo calibrado para Colombia 1994-2004

- El modelo descrito en este capítulo puede ser utilizado en una aplicación para Colombia, con el fin de evaluar si puede reproducir cualitativa y cuantitativamente los hechos estilizados observados para la economía colombiana.

7.1. Formas funcionales

- Asumimos "indivisibilidad" en el trabajo, por lo que utilizamos una función de utilidad de la forma

$$u(c_t, o_t) = \log c_t + Bo_t$$

con $B > 0$, función de utilidad al estilo Hansen (1985 [2]).

- La tecnología puede ser descrita como una función de producción Cobb-Douglas:

$$F(k_t, l_t) = \exp(z_t) k_t^{\alpha} l_t^{(1-\alpha)}$$

donde $z_{t+1} = \rho_z z_t + \epsilon_{t+1}^z$ es el proceso exógeno de productividad.

- El gasto público lo asumimos exógeno y de la forma:

$$g_{t+1} = (1-\rho_g)g + \rho_g g_t + \epsilon_{t+1}^g$$

Esta formulación implica que el valor esperado del gasto público es g ya que asumimos $\rho_g \in (0,1)$.

7.2. Estado estacionario

- Se define al estado estacionario como aquella situación en la que las variables son invariantes en el tiempo. En el caso estocástico además se asume que las variables aleatorias tienen por valor a su media. Dadas las formas funcionales ya podemos hallar explícitamente las relaciones de estado estacionario del modelo.
- De (14) se tiene que $\frac{1}{c_t} = \lambda_t$ y de (15) se llega a $B = \lambda_t w_t$. Entonces $Bc_t = w_t$, la tasa marginal de sustitución entre consumo y ocio es equivalente a la relación de precios.
- De (10) y (11) se concluye que para todos los períodos $\pi_t = 0$ porque $y_t = w_t l_t + r_t k_t$ debido a la homogeneidad de grado uno de la función de producción.
- De (10) se concluye que en estado estacionario $r = \alpha k^{\alpha-1} l^{1-\alpha} = \alpha \frac{y}{k}$.
- De la ecuación de Euler se tiene que $\beta E_t \left[\frac{1+r_{t+1}-\delta}{c_{t+1}}\right] = \frac{1}{c_t}$, luego, en estado estacionario $\beta \left[\frac{1+r-\delta}{c}\right] = \frac{1}{c}$,

$$\begin{aligned} 1 + r - \delta &= \frac{1}{\beta} \\ \alpha k^{\alpha-1} l^{1-\alpha} &= \frac{1}{\beta} + \delta - 1 \\ k &= \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} l \end{aligned}$$

- Por lo tanto el producto de estado estacionario es

$$y = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} l$$

lo que implica una relación $\frac{y}{l}$ constante.

- En estado estacionario la inversión es $x = \delta k$.
- El salario de estado estacionario es $w = (1-\alpha)k^{\alpha} l^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{y}{l}$.
- En estado estacionario la restricción de recursos $y = c + x + g$ implica que el estado estacionario del consumo es $c = y - x - g$.
- De las condiciones de primer orden de los individuos se tiene:

$$l = \frac{(1-\alpha)y}{Bc}$$

- La media del proceso exógeno de productividad es cero.
- La media del proceso exógeno del gasto público es g.
- La relación capital/producto es $\frac{k}{y} = \frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}$.
- Hemos entonces determinado el estado estacionario para todas las variables de nuestro modelo.

Cuadro 1: Razones respecto al PIB 1994:1-2005:2

Razón	Valor
Consumo Ajustado/PIB	0.597
Inversión Ajustada/PIB	0.203
Gasto Público/PIB	0.199

Cuadro 2: Otras razones 1994:1-2004:4

Razón	Valor Trimestral
Capital/PIB	8.774
PIB/Trabajadores	3.1875
Inversión ajustada/Capital	0.0233
Capital/Trabajadores	27.957

7.3. Construcción de "medidas" consistentes

- Los datos de cuentas nacionales corresponden a las series del Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas DANE. Se dispone de series desestacionalizadas para el PIB real, consumo público y privado, formación bruta de capital fijo, importaciones y exportaciones. Están disponibles para el período 1977:1 - 2005:2.
- Los datos del stock de capital corresponden a cálculos del Banco de la República. La serie para capital está hasta 2002:2.
- Los datos de horas de trabajo semanales promedio se obtuvieron de la Encuesta Nacional de Hogares, a una frecuencia trimestral hasta 2004:4. Son las horas promedio trabajadas por semana para todos los trabajadores.
- Seguimos la metodología propuesta en Cooley y Prescott (1995 [1]) y a la inversión agregamos las exportaciones netas y el consumo de durables.
- Utilizamos datos para el período 1994:1 - 2004:4 por disponibilidad de la información. Con los datos podemos obtener las siguientes relaciones de "largo plazo" para la economía colombiana:
- Otras razones importantes que pueden calcularse con los datos ajustados son:

7.4. Asignación de valores a los parámetros

7.4.1. Tasa de Depreciación δ

- En estado estacionario se tiene que $x = \delta k$. El parámetro de depreciación del capital puede ser calibrado al hallar la razón Inversión/Capital. Se toma la Inversión como la inversión total más el consumo durable más las exportaciones netas. El stock de capital se obtuvo del Banco de la República.
- Para la economía colombiana se obtiene $\delta = 0{,}0233$ en una calibración trimestral, lo que implica una depreciación anual de 9.66 %.

7.4.2. Fracción Horas de Trabajo l

- De la Encuesta Nacional de Hogares (DANE) se toma el promedio de las horas trabajadas por semana en 7 áreas metropolitanas para el período 1984:1-2004:4. El promedio es de 48,16 horas semanales. La semana tiene

168 horas. Entonces el parámetro l se calibra de forma que coincida con los datos colombianos: $l = \frac{48{,}16}{168} \approx 0{,}287$. Es decir, cerca del 29 % del tiempo se dedica a actividades laborales.

7.4.3. Factor de descuento β

- El factor de descuento se puede calibrar para reproducir en estado estacionario dos relaciones: $\frac{k}{y}$ o $\frac{x}{y}$.
- El factor de descuento que reproduce $\frac{k}{y}$ está dado en el modelo por $\beta_{k/y} = \frac{k/y}{(1-\delta)k/y+\alpha}$. El factor de descuento que reproduce $\frac{x}{y}$ está dado por $\beta_{x/y} = \frac{x/y}{(1-\delta)x/y+\delta\alpha}$. Teóricamente ambos son equivalentes ya que $x = \delta k$.
- Se prefiere utilizar $\beta_{x/y}$ ya que se calibra el modelo de forma tal que las razones del consumo, la inversión y el gasto público respecto al PIB coincidan con los datos, en estado estacionario. Se hace así porque los datos de cuentas nacionales son más confiables que los datos de capital. De esta forma se obtiene $\beta_{x/y} = 0{,}986$.
- Este factor de descuento, junto con el resto de la calibración, permite obtener una razón de estado estacionario $\frac{k}{y} = 8{,}712$. Para la economía colombiana esa razón es de $\frac{k}{y} = 8{,}774$ para el período 1994:1-2005:2.

7.4.4. Remuneracion del Capital en el Producto α

- De la función de producción Cobb-Douglas se obtiene que $\frac{wl}{y} = 1 - \alpha$. El parámetro α de la función de producción Cobb-Douglas se calibra con la participación promedio de la remuneración al trabajo respecto al producto, obtenido de las cuentas nacionales. Estimativos previos arrojan un resultado de $\alpha = 0{,}33$.

7.4.5. Utilidad marginal del ocio B

- En estado estacionario se tiene $c = \frac{w}{B} = \frac{(1-\alpha)y}{Bl}$. Se concluye que $B = \frac{(1-\alpha)}{lc/y}$. Para Colombia la razón Consumo/PIB consistente con el modelo (1994:1-2005:2) es en promedio constante e igual a $\frac{c}{y} = 0{,}597$. Entonces, como $l = 0{,}287$ y $\alpha = 0{,}33$, se estima que la utilidad marginal del ocio es $B = 3{,}912$.

7.4.6. Parámetros del proceso de Productividad ρ_z, σ_{ϵ^z}

- La productividad total sigue un proceso autorregresivo de la forma $z_{t+1} = \rho_z z_t + \epsilon^z_{t+1}$. El parámetro ρ_z se calibra a partir de una estimación de la productividad total obtenida de la función de producción Cobb-Douglas:
$$\log z_t = \log y_t - \alpha \log k_t - (1-\alpha) \log l_t$$
- Al calcular el proceso autorregresivo de la productividad total estimada se obtiene $\rho_z = 0{,}811$.
- Y la desviación estándar de los residuos de la regresión es $\sigma_{\epsilon^z} = 0{,}0071$.

7.4.7. Parámetros del proceso de Gasto público $\overline{g}$, ρ_g, σ_{ϵ^g}

- El parámetro $\overline{g}$ se calibra de forma que reproduzca la relación Gasto público / PIB que en Colombia. Para el período 1994:1-2005:2 es $\frac{g}{y} = 0{,}199$.
- El gasto público sigue un proceso autorregresivo de la forma $g_{t+1} = (1-\rho_g)\overline{g} + \rho_g g_t + \epsilon^g_{t+1}$. El parámetro ρ_g se calibra a partir de la regresión del modelo AR(1) trimestral para el ciclo del gasto público obtenido del filto Hodrick-Prescott. El parámetro σ_{ϵ^g} se calibra a partir de la desviación estándar de los residuos de la misma regresión.
- El modelo AR(1) tiene intercepto no significativo, coeficiente de autocorrelación significativo y sus residuales son ruido blanco. Entonces $\rho_g = 0{,}563$ y $\sigma_{\epsilon^g} = 0{,}0304$.

Cuadro 3: Calibración Modelo Básico - Colombia

Descripción	Parámetro (Calibración Trimestral)
Depreciación	$\delta = 0{,}0233$
Elasticidad capital-producto	$\alpha = 0{,}33$
Gasto público promedio	$g = 0{,}166$
Factor de descuento	$\beta = 0{,}986$
Utilidad marginal del trabajo	$B = 3{,}912$
Persistencia productividad	$\rho_z = 0{,}811$
Varianza choque productividad	$\sigma_{\epsilon^z} = 0{,}0071$
Persistencia gasto público	$\rho_g = 0{,}563$
Varianza choque gasto público	$\sigma_{\epsilon^g} = 0{,}0304$

7.5. Aproximación computacional

- Debido a las no linearidades presentes en las condiciones de solución halladas y a la naturaleza estocástica y dinámica del problema es difícil hallar una solución analítica explícita para cada variable de interés presente en el modelo. Por ello es necesaria una solución computacional.

- Varios son los métodos disponibles y amplia la literatura al respecto[7]. En esta aplicación utilizamos la solución por aproximación log-lineal de las condiciones óptimas alrededor del estado estacionario. Se utiliza el software Dynare[8] para la computación del estado estacionario y la aproximación log-lineal. Se escoge el método log-lineal por la facilidad de interpretación de los impulsos respuesta y las desviaciones estándar, como diferencias porcentuales de las variables respecto al estado estacionario.

7.6. Análisis cualitativo

- Una herramienta muy útil derivada de la solución computacional de los modelos RBC es el impulso respuesta: asumimos que la economía se encuentra en estado estacionario y en el período inicial recibe un único choque exógeno. En el modelo presentado en las secciones anteriores hay dos posibles choques: de productividad y de gasto público. Usualmente se utiliza un único choque de una desviación estándar sobre las variables aleatorias exógenas utilizadas en el modelo.

- En el modelo hay procesos autorregresivos que reciben choques exógenos, de la forma $q_{t+1} = (1-\rho_q)q + \rho_q q_t + \epsilon^q_{t+1}$, donde $q = z, g$. La variable aleatoria exógena es ϵ^q_{t+1}.

- Para generar los impulsos respuesta se asumen unas secuencias $\{\epsilon^q\}_{t=0}^{\infty} = \{\sigma_q, 0, 0, \cdots\}$ y $\{\epsilon^{-q}\}_{t=0}^{\infty} = \{0, 0, 0, \cdots\}$ donde ϵ^{-q} representa todas las variables aleatorias diferentes a ϵ^q. Entonces podríamos pensar en el impulso respuesta como la reacción del modelo, inicialmente en su estado estacionario, a un único choque de una desviación estándar en una variable exógena, con todos los demás choques "apagados". Se trata de choques ortogonales.

- Dado que el modelo se solucionó computacionalmente con el método de log-linearización, los impulsos respuesta muestran aproximadamente las desviaciones porcentuales de las variables respecto a su estado estacionario ocasionadas por un único choque exógeno no esperado.

7.6.1. Choque de productividad

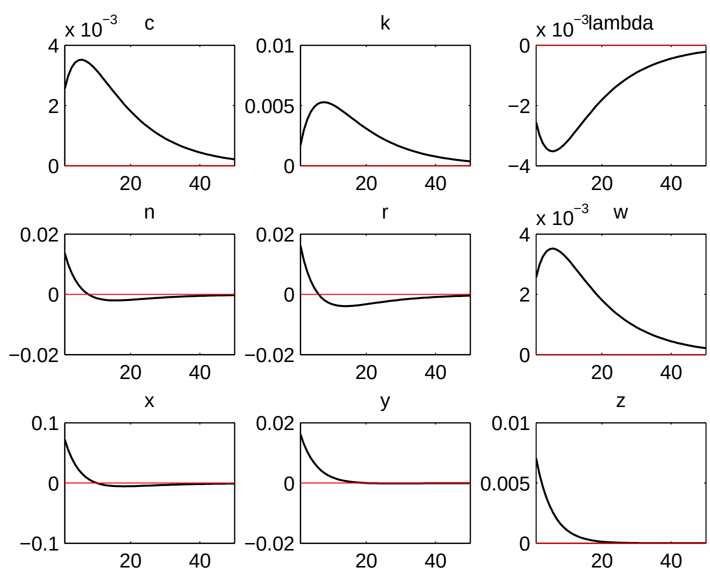
- Un choque positivo en la productividad genera un aumento exógeno en la demanda de factores productivos por parte de la firma. Este incremento de las cantidades demandadas, dado un salario, origina en interacción con la

[7] Una buena explicación puede hallarse en Heer y Maussner, "Dynamic General Equilibrium Modelling", Springer 2005.
[8] Dynare versión 3.0. por Michel Juillard. Software e información disponibles en http://www.cepremap.cnrs.fr/dynare/

oferta, de acuerdo con la teoría microeconómica básica, un aumento en los precios y cantidades de equilibrio. Por lo tanto, aumentan los salarios w_t y la tasa de retorno al capital r_t y se incrementa la fracción de horas de trabajo l_t y el capital demandado k_t. El aumento en las cantidades utilizadas de factores generan un efecto indirecto y positivo sobre el producto, reforzado por el efecto directo de un aumento en la productividad. Por lo tanto, aumenta y_t.

- Los hogares observan un aumento de la demanda por factores y por lo tanto de los salarios. Se genera un efecto ingreso y un efecto sustitución. Un incremento en el salario es visto como un aumento en el costo del ocio. Los hogares deciden sustituir ocio por consumo, y por lo tanto ofrecen más horas de trabajo en el mercado. Pero a su vez, dada la mayor cantidad de recursos que disponen, deciden consumir más. Entonces aumenta c_t.
- Debido al aumento en los retornos del capital, y por la mayor demanda generada por el choque de productividad, la inversión x_t aumenta, y el stock de capital se incrementa.
- Un aumento de la productividad de 0,7 % ocasiona un aumento del producto de 1,62 % respecto al estado estacionario. La inversión varía más, cerca de 7,2 %.

Figura 1: Choque ortogonal a la productividad total de los factores



7.6.2. Choque de gasto público

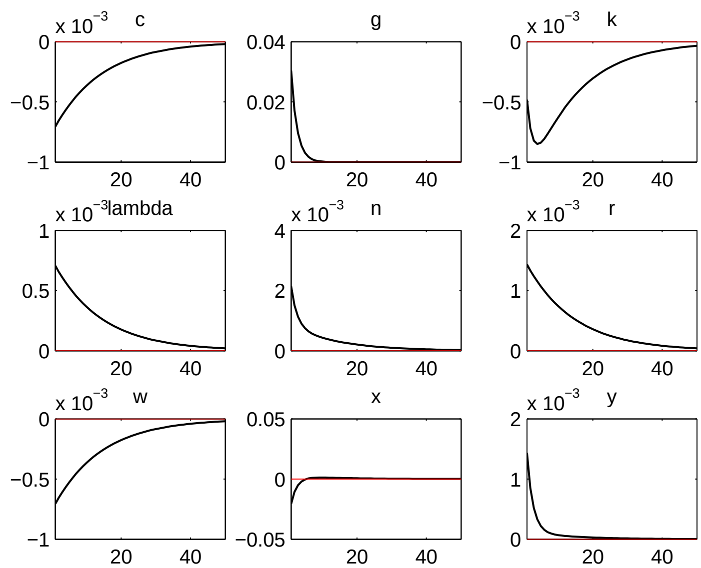
- Un aumento exógeno del gasto público (choque fiscal) genera en este modelo un claro efecto de *crowding-out*. Esto sucede porque se asumió un gasto improductivo, el choque fiscal no tiene correlación con el choque de productividad[9].
- El aumento no esperado del gasto público ocasiona una disminución en los recursos de los hogares debido a que el presupuesto fiscal balanceado se financia con impuestos de suma fija. Hay entonces un efecto ingreso

[9] El gasto público estaría correlacionado positivamente con la productividad si existiera gasto productivo, es decir, si un mayor gasto del gobierno generara una externalidad positiva o un efecto *spill-over* sobre la economía. En ese caso el efecto de un choque fiscal sería diferente.

negativo para los hogares, que ocasiona reducción en el consumo y en el ocio (que son "bienes normales"). Este desplazamiento positivo de la oferta de trabajo ocasiona una disminución de los salarios y un incremento en la producción.

- La utilización de recursos reales para gasto público improductivo genera *crowding-out*. La disminución de los recursos en la economía ocasiona un aumento en las tasas de interés, una disminución en la inversión y el stock de capital.
- Un choque de una desviación estándar implica un aumento del gasto público de 3 %, ocasiona un aumento del 0,143 % para el producto, respecto al estado estacionario.
- Los efectos del choque desaparecen después de 25 períodos (trimestres).

Figura 2: Choque ortogonal al gasto público



7.7. Análisis Cuantitativo

- El modelo fue solucionado con la técnica de log-linearización utilizando el programa Dynare. La ventaja es que permite obtener los segundos momentos teóricos de las variables filtrados con Hodrick-Prescott. Además descompone la variación de acuerdo a los diferentes choques posibles en el modelo. El objetivo del ejercicio es comparar los momentos y propiedades estadísticas de las variables simuladas en el modelo y las variables observadas en la economía colombiana.
- Los resultados obtenidos son:

Cuadro 4: Desviaciones estándar filtro Hodrick-Prescott

Variable	Economía colombiana		Economía simulada	
	Valor σ_x	Valor relativo $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$	Valor σ_x	Valor relativo $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
PIB	0.0188	1.000	0.0198	1.000
Consumo	0.0164	0.871	0.0046	0.232
Gasto público	0.0394	2.098	0.0322	1.626
Capital	0.0107	0.569	0.0061	0.308
Inversión	0.0514	2.736	0.0913	4.611
Horas de Trabajo Promedio	0.0133	0.710	0.0171	0.864
Salario	0.0438	2.330	0.0046	0.232

Para la economía simulada se reportan los *momentos teóricos* HP filter, lambda = 1600

- El modelo aproxima bastante bien la variación del PIB y del gasto público modelado como exógeno. Sin embargo, arroja una variabilidad del consumo bastante inferior a la observada. En nuestro modelo se suaviza el consumo más allá de lo esperado.

- El modelo sobreestima la variabilidad de la inversión. En la economía se observa que es cerca de tres veces mayor que la del PIB (para el período 1994:1 - 2005:2), pero en el modelo alcanza a ser casi cinco veces. Eso sucede porque no consideramos la introducción de los costos de ajuste al capital. Si lo hubiéramos hecho la volatilidad de la inversión habría disminuído significativamente en el modelo.

- Para el período 1994:1 - 2005:2 el modelo ajusta bastante bien respecto a las horas promedio. Este resultado puede explicarse por la modelación del trabajo. Según lo explicado por Hansen (1985 [2]) la variación en el empleo puede deberse a un aspecto extensivo y a otro intensivo: cuántas personas entran y salen de la fuerza laboral y cuánto de su tiempo dedican a trabajar. En este modelo se consideró la fracción de tiempo, que podría ser equivalente a las horas promedio trabajadas. Otros modelos que no utilizan la función de utilidad a la Hansen presentan problemas simulando las horas promedio.

- Sobre el salario, en todo momento se cumple $\frac{w_t}{c_t} = B$. La correlación entre el salario y el consumo es uno. Por lo tanto, la desviación estándar del consumo y del salario es la misma, y ambas parecen menores a las observadas en la economía. La explicación puede también relacionarse con el aspecto extensivo e intensivo de la participación laboral.

- Por otra parte, Dynare permite analizar la composición de la varianza de cada variable en explicado por choques de productividad o choques fiscales. Los resultados se reportan en la siguiente tabla:

Cuadro 5: Descomposición de Varianza (en porcentaje) (HP filter, lambda = 1600)

Variable	Choque de Productividad	Choque fiscal
c	96.06	3.94
g	0.00	100.00
k	96.62	3.38
l	98.18	1.82
r	99.19	0.81
w	96.06	3.94
x	94.09	5.91
y	99.42	0.58
z	100.00	0.00

- Un resultado que parece común a la literatura *RBC* indica que el principal motor teórico del ciclo real es el choque a la productividad. Un resultado aparente de la tabla es que el choque de gasto público parece no tener la fuerza suficiente para generar un ciclo real, ya que su participación en la variabilidad de las variables de interés es pequeña.

7.8. Conclusiones

- Nuestro sencillo es capaz de reproducir en buena parte los hechos estilizados. Se obtienen correlaciones respecto al PIB bastante consistentes con las observadas en la economía colombiana. El modelo reproduce las volatilidades relativas: la inversión es más volátil que el PIB, el consumo y el capital son menos volátiles etc.
- El modelo subestima la varianza del ciclo del consumo. Se está sobre-suavizando el consumo.
- El modelo sobreestima la varianza de la inversión, debido a la falta introducción de costos de ajuste del capital.
- La descomposición de la varianza de las series indica que el poder reproductivo de un ciclo real descansa sobre el choque exógeno de productividad más que sobre cualquier otro choque exógeno (fiscal).

8. Los Ciclos Económicos

- El modelo presentado permite estudiar los ciclos económicos. Para ver esto, pensemos en una situación en la cual la economía se encuentra en su estado estacionario. De un momento a otro ocurre un "choque" (ϵ^z_{t+1} se materializa, o asume un valor específico) la economía se sale de su estado estacionario, y los agentes económicos ajustan sus planes, reaccionando ante el choque. Varias preguntas: ¿cómo reaccionan las variables de la economía? ¿regresan a su estado estacionario? ¿qué tan tardan en hacerlo?
- El ciclo económico tiene entonces dos mecanismos: el primero, son las *fuentes* de los ciclos económicos y el segundo son los *mecanismos de propagación.*
- En particular, el modelo tiene dos fuentes de los ciclos económicos (es decir, dos variables cuyas realizaciones futuras son inciertas): la productividad futura y el nivel de gasto público futuro. Ambas variables están sujetas a choques, cuya distribución es conocida para los agentes. En consecuencia toman decisiones considerando la posibilidad de un mayor o menor nivel de cada una de las variables.
- El mecanismo de propagación en nuestro modelo simple es la forma como los agentes económicos deciden consumir, invertir, trabajar, producir, etc. Estas decisiones están caracterizadas en las condiciones de optimalidad de los individuos y las firmas.
- Cuando ocurre un choque, de productividad digamos, los agentes reaccionarán ajustando sus decisiones que previamente eran óptimas. La reacción de los individuos (en términos de sus decisiones de consumo e inversión) va a ser diferente dependiendo si los efectos de los choques son transitorios o permanentes. Un choque que tienda a tener efectos prolongados (o casi permanentes) es probable que cambie el consumo de forma prolongada (tal como lo predice la hipótesis del ingreso permanente). Un choque que tienda a tener efectos transitorios es probable que cambie apenas transitoriamente el consumo, sin modificar patrones de consumo.

9. Ejercicios

1. Demuestre que cuando la tecnología F presenta rendimientos constantes a escala, en equilibrio las utilidades de las firmas son cero.
2. Verifique que las ecuaciones (19)-(24) son equivalentes a las ecuaciones (25)-(28). Discuta con sus compañeros de grupo qué significa este resultado.

3. ¿De dónde sale la ecuación (24)? Explique qué relación tiene esta ecuación con las cuentas nacionales. ¿Por qué no están la balanza comercial incluída en las cuentas nacionales de esta economía?

4. Oferta de trabajo inélastica. Supongamos ahora que los individuos no pueden escoger el tiempo entre trabajar y descansar sino que ofrecen inelásticamente una unidad de tiempo, $l_t = 1, \forall t$. Suponga además que las preferencias del individuo representativo son $u = \log(c_t)$ y que la tecnología disponible para las firmas es del tipo Cobb-Douglas: $y_t = k_t^{\alpha} l_t^{(1-\alpha)}$. Responda:

   a) Escriba el problema del individuo y la firma representativa.

   b) Encuentre las condiciones de optimalidad para cada uno de los agentes

   c) Defina el equilibrio competitivo en esta economía

   d) Encuentre el estado estacionario del modelo. Es decir, encuentre una expresión para (k, c, x, y) que dependa de los "parámetros profundos del modelo", en este caso α, β y δ.

5. Preferencias ESC (o CES en inglés). Haga lo mismo que en la pregunta anterior, pero tomando las preferencias como $u = \frac{c^{(1-\sigma)}}{1-\sigma}$. Note que ahora hay un parámetro profundo más. ¿Cuál es? Muestre que $\lim_{\sigma \to 1} \frac{c_t^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} = \log(c_t)$, lo que indica que las preferencias logaritmicas son un caso especial de las preferencias CES.

6. Trabajo Indivisible, Hansen (1985, [2]). Una situación importante es aquella en la que el trabajo es "indivisible". Los individuos trabajan toda una jornada o no trabajan en absoluto. Hansen (1985) muestra que esta situación implica que las preferencias del individuo representativo serán $u = \log(c_t) - Bl_t$, donde B es una constante. Encuentre las condiciones de primer orden del problema y describa qué observa de la relación entre el consumo y el ocio.

7. Modelo de dos períodos. En nuestro modelo determinístico, suponga que $T = 1$, $u = \ln(c_t)$ e $y_t = k_t^{\alpha} l_t^{(1-\alpha)}$. Defina el equilibrio competitivo en esta economía y caracterice las sendas de precios y cantidades de equilibrio para $t = 0, 1$. Haga lo mismo pero planteando el problema del planificador central. Caracterice la solución. Verifique su caracterización de la solución del equilibrio competitivo y del planificador central sean idénticas.

Referencias

[1] Thomas F. Cooley and Edward C. Prescott. Economic growth and business cycles. In *Frontiers of Business Cycle Research*, chapter 1. Princeton University Press, 1995.

[2] Gary D. Hansen. Indivisible labor and the business cycle. *Journal of Monetary Economics*, 16:309–327, 1985.