

Capítulo 4: Economía Cerrada con Dinero y Precios Flexibles*

Franz Hamann

11th April 2005

1 Introducción

- La economía descrita en el capítulo anterior es una economía “no-monetaria”. Existen transacciones de bienes y servicios, pero sin la intervención del dinero. No hay un “medio de intercambio”, no hay dinero que facilite las transacciones.
- Tampoco existe un activo que no tenga un retorno nominal y que sea “dominado” en términos del retorno esperado por otros activos que si generan intereses.
- Para emplear nuestro modelo básico como herramienta de análisis debemos asignarle un rol al dinero. El dinero debe ser demandado por algún motivo, de tal forma que en equilibrio los agentes demanden dinero y el dinero tenga algún valor (distinto a cero).
- Por simplicidad en la exposición y en la derivación de algunas relaciones fundamentales, trabajamos con un ambiente determinístico.

2 La demanda de dinero

- Una pregunta fundamental en teoría monetaria es: ¿Cómo caracterizar la demanda de dinero?
- Ya vimos en la monitoría las diversas teorías de la demanda de dinero, en el contexto de los modelos de equilibrio parcial. Estos modelos incluyen:
 1. Teoría Cuantitativa de la Demanda de Dinero
 2. El modelo de Keynes de Preferencia por la Liquidez
 3. El modelo de Portafolio de Tobin
 4. El modelo de Costos de Transacción de Baumol-Tobin.
- Para introducir un rol para el dinero en los modelos de equilibrio general se han empleado tres enfoques:
 1. El dinero, como cualquier otro bien, le genera utilidad a los individuos (dinero en la función de utilidad).
 2. Imponer costos de transacción, bien sea haciendo que:
 - (a) las transacciones sean costosas,
 - (b) algunos bienes tengan que ser transados con dinero (restricciones de dinero por anticipado o “cash-in-advance”),

*Este documento es estrictamente personal y de uso académico. En ningún momento compromete al Banco de la República, su Junta Directiva o cualquier otra persona del Banco. Los errores y cualquier tipo de apreciación contenidos en este documento son exclusivamente de mi responsabilidad.

- (c) la combinación de tiempo y dinero generen una tecnología para producir servicios de transacción, los cuales son necesarios para adquirir bienes de consumo (“shopping-time”),
- (d) el intercambio por medio del trueque es costoso.

3. El dinero, como cualquier otro activo, sirve para transferir recursos intertemporalmente

- Algunos resultados son generales, otros resultados dependen de la forma como se introduzca el dinero en el modelo.
- En estas notas, dado nuestro énfasis en analizar los aspectos monetarios, pero en el contexto de los Mercados Emergentes, nos enfocamos en los casos 1 y 2a. Los casos 2b y 2c los dejamos como ejercicios.

3 Dinero en la Función de Utilidad

3.1 Firmas

- Consideremos la firma representativa. En cada período la firma ofrece al mercado todo el resultado de su producción del bien final, es decir, $y_t = F(k_t, l_t), \forall t$. Adicionalmente en cada período la firma sólo arrienda el capital y paga servicios laborales para producir un bien final. Su problema puede expresarse como un problema estático en el que las firmas maximizan utilidades período a período:

$$\max_{k_t, l_t} [F(k_t, l_t) - r_t k_t - w_t l_t], \forall t$$

- Las condiciones de primer orden son:

$$r_t = F_k(k_t, l_t), \forall t \tag{1}$$

$$w_t = F_l(k_t, l_t), \forall t \tag{2}$$

- Este resultado combinado con el hecho de que hemos supuesto que F es homogénea de grado uno, implica que $\pi = 0$.
- Hasta ahora no hay ninguna diferencia con nuestro modelo básico.

3.2 El Estado

- Suponemos que el Estado está dividido en dos agencias independientes: el Banco Central (autoridad monetaria) y el Gobierno (la autoridad fiscal).
- El *presupuesto del Banco Central* es:

$$(D_{t+1}^B - D_t^B) + TBC_t = i_t D_t^B + (M_{t+1}^s - M_t^s)$$

donde M_t^s el stock de saldos nominales al comienzo del período t , D_t^B es el stock de deuda del Gobierno a disposición del Banco Central, i_t es la tasa de interés nominal de la deuda pública entre el período t y el período $t+1$, y TBC_t son las transferencias del Banco Central (netas de sus gastos de funcionamiento) al Gobierno.

- Al lado izquierdo tenemos los gastos: compras de deuda del gobierno y transferencias al gobierno. Al lado derecho los ingresos: pago de intereses por parte del gobierno al Banco Central y la emisión monetaria.¹

¹Como la economía es cerrada el Banco Central no puede acumular activos extranjeros (es decir, no acumula reservas internacionales). M^s lo podemos asociar con la base monetaria, dado que no hay bancos en el modelo y D^B como el stock de TES en el Banco Central.

- El *presupuesto del Gobierno* es:

$$G_t + i_t D_t^T = T_t + (D_{t+1}^T - D_t^T) + TBC_t$$

donde G_t , son los gastos corrientes nominales, D_t^T es el stock de deuda pública al comienzo del período t y T_t son los impuestos nominales de suma fija.

- Para consolidar la restricción presupuestal del Estado, notemos que necesariamente el stock de deuda pública en manos de los agentes es:

$$D_t \equiv D_t^T - D_t^B$$

- Luego, la restricción presupuestal del Estado (o sector público consolidado) es:

$$G_t + i_t D_t = T_t + (D_{t+1} - D_t) + (M_{t+1}^s - M_t^s) \quad (3)$$

con D_0 dado. Adicionalmente, la política del gobierno debe satisfacer la condición de que $(1+i_0)D_0$ más el valor presente de los gastos es igual al valor presente de los impuestos más los ingresos de la emisión. Más adelante estudiamos con cierto detalle la restricción presupuestal del sector público consolidado.

- De nuevo, en el lado izquierdo están los gastos: gastos corrientes y pagos de intereses, mientras que del lado derecho están las fuentes de ingresos que resultan de la emisión monetaria y las ventas de deuda pública a los agentes.
- En términos reales la restricción presupuestal del gobierno queda:

$$g_t + \frac{i_t d_t}{1 + \pi_t} = t_t + d_{t+1} - \frac{d_t}{1 + \pi_t} + m_{t+1}^s - \frac{m_t^s}{1 + \pi_t}$$

- En sesiones posteriores analizaremos las consecuencias macroeconómicas del presupuesto del sector público consolidado, de la relevancia de la forma como se financie y de su sostenibilidad. Por ahora suponemos que esta restricción se cumple todo el tiempo.
- Antes de continuar con la descripción del problema de los individuos, especificaremos los efectos de la política monetaria. Para esto realizamos algunos supuestos sobre la política fiscal.
- Consideremos la ecuación (3) donde el stock inicial de deuda del gobierno está dado, D_0 . Dado que nuestro interés es estudiar los efectos de la política monetaria, fácilmente podemos suponer que $G_t = 0, \forall t$.
- En este caso una expansión monetaria de tamaño ΔM^s puede ser empleada para financiar:

1. Transferencias de suma fija por un valor de $T = -\Delta M^s$, dejando intacta la deuda pública.
2. Retirar deuda existente del gobierno por la misma magnitud

- El caso (1) corresponde a una situación en la que, por ejemplo, el Estado le reparte \$50.000 en un sobre a todos los individuos.
- El caso (2) corresponde a la típica “Operación de Mercado Abierto”. El Banco Central intercambia deuda del gobierno por pesos.
- Como veremos en sesiones posteriores, dado que los impuestos son de suma fija, estos dos tipos de formas de expandir la oferta monetaria son equivalentes.
- Para simplificar nuestro análisis, supongamos que $D_t = 0$ para todo $t \geq 1$ y adicionalmente supongamos que la deuda inicial también es cero $D_0 = 0$. En estas circunstancias la restricción presupuestal del gobierno queda:

$$-T_t = M_{t+1}^s - M_t^s, \forall t$$

que indica que la emisión monetaria se transfiere en una suma fija a los individuos. Nótese que una transferencia de suma fija, no es otra cosa que un impuesto de suma fija negativo.

- Ahora que hemos “apagado la política fiscal”, necesitamos especificar la política monetaria. Supongamos que la oferta monetaria crece a una tasa $e^{\mu_t} - 1$ durante el período t :

$$M_{t+1}^s = e^{\mu_t} M_t^s \quad (4)$$

donde μ_t es conocida al inicio del período t . En consecuencia los agentes reciben una transferencia: $-T_t = (e^{\mu_t} - 1)M_t^s$.

- Finalmente supongamos que el dinero crece a una tasa constante, $\mu_t = \mu, \forall t$. Posteriormente en una versión estocástica del modelo supondremos que μ_t evoluciona de acuerdo con un proceso estocástico.

3.3 Individuos

- Consideremos ahora el individuo representativo. Como el dinero provee utilidad directamente, éste entra directamente en la función de utilidad.
- ¿Qué agregado debe darle utilidad a los agentes real o nominal? Si los agentes son racionales deben tener en cuenta las cantidades reales, es decir, la cantidad de bienes que es factible adquirir con una cantidad de dinero nominal dada a los precios dados.
- Definamos P_t como el nivel de precios nominal del período t . Por lo tanto, la función de utilidad del agente representativo dependerá de c_t , como es usual, y de $\frac{M_{t+1}^d}{P_t}$ que es la cantidad de saldos reales demandados por los individuos. Por simplicidad, vamos a suponer una oferta de trabajo inelástica, es decir $l_t = 1$ para todo t .
- En adición al stock de capital, los individuos tienen a su disposición otro activo: títulos de deuda pública (conocidos en Colombia como TES). Ya habíamos mencionado que los TES rinden una tasa nominal i_t .
- Ahora analicemos la restricción de presupuesto. Al igual que en el modelo básico, el individuo puede decidir entre consumir y ahorrar (acumular capital físico). Adicionalmente, debe decidir dado su stock actual de saldos nominales, M_t^d , qué cantidad de saldos nominales debe llevar para el siguiente período, M_{t+1}^d . Igualmente debe decidir que stock de TES demandar para el período siguiente D_{t+1} . La restricción del individuo en términos nominales es:

$$D_{t+1} - D_t + P_t [c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t] + (M_{t+1}^d - M_t^d) + T_t \leq P_t [w_t + r_t k_t] + i_t D_t, \forall t$$

y definiendo $d_{t+1} = \frac{D_{t+1}}{P_t}$ y $m_{t+1}^d = \frac{M_{t+1}^d}{P_t}$ tenemos que en términos reales la restricción es:

$$c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t + \left(m_{t+1} - \frac{m_t^d}{1 + \pi_t} \right) + t_t + d_{t+1} - \frac{d_t}{1 + \pi_t} \leq w_t + r_t k_t + \frac{i_t d_t}{1 + \pi_t}, \forall t.$$

donde $\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$ es la inflación durante el periodo t .

- Dado que los hogares no pueden emitir dinero, se requiere una restricción adicional:

$$m_{t+1}^d \geq 0, \forall t$$

- El problema de los hogares es entonces:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_{t+1})$$

sujeto a:

$$c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t + \left(m_{t+1} - \frac{m_t^d}{1 + \pi_t} \right) + t_t + d_{t+1} - \frac{d_t}{1 + \pi_t} \leq w_t + r_t k_t + \frac{i_t d_t}{1 + \pi_t}$$

más las condiciones iniciales y terminales usuales sobre las variables de estado y $m_{t+1}^d \geq 0$.

- Construyendo el Lagrangiano:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t u(c_t, m_{t+1}^d) + \Lambda_t \left(w_t + r_t k_t + (1 - \delta)k_t - c_t - t_t + \frac{m_t^d}{1 + \pi_t} + \frac{(1 + i_t)d_t}{1 + \pi_t} - k_{t+1} - m_{t+1}^d - d_{t+1} \right) \right\}$$

- Tenemos que las condiciones de primer orden con respecto a c_t , m_{t+1} , k_{t+1} y d_{t+1} son:

$$u_c(c_t, m_{t+1}^d) - \lambda_t = 0 \quad (5)$$

$$u_m(c_t, m_{t+1}^d) - \lambda_t + \frac{\beta \lambda_{t+1}}{1 + \pi_{t+1}} = 0 \quad (6)$$

$$-\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} (1 + r_{t+1} - \delta) = 0 \quad (7)$$

$$-\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} \frac{(1 + i_{t+1})}{(1 + \pi_{t+1})} = 0 \quad (8)$$

$$k_0, m_0^d > 0, d_0 \text{ dados} \quad (9)$$

donde $\lambda_t \equiv \frac{\Lambda_t}{\beta^t}$.

- Algunas observaciones que se desprenden de la optimalidad de las decisiones individuales son:
- De las ecuaciones (7) y (8) tenemos que:

$$1 + i_{t+1} = (1 + r_{t+1} - \delta)(1 + \pi_{t+1})$$

que indica que en el óptimo, los agentes igualan el retorno real de la deuda pública con la tasa de interés real que se le paga al capital físico. Esta ecuación se conoce como *Ecuación de Fisher* y dice que la tasa de interés nominal es igual a la tasa de interés real más la inflación esperada.

- Cuando el stock de capital es constante, esta ecuación solita predice que cambios en la tasa de interés nominal deben reflejar cambios en la inflación esperada. En otros contextos, como es el caso de la mayoría de los modelos no estructurales, mucha gente emplea esta versión:

$$i_{t+1} = r + \pi_{t+1}$$

que supone: capital constante, depreciación cero y $i\pi \approx 0$. Es claro que esto es apenas una aproximación.

- De las ecuaciones (5), (6) y (8) es posible encontrar la demanda de dinero. Ver ejercicio 4.
- Esta ecuación “define” la demanda de saldos reales. Ésta depende de la tasa de interés nominal y del consumo.
- De las ecuaciones (5) y (6) tenemos que:

$$u_m(c_t, m_{t+1}^d) + \frac{\beta u_c(c_{t+1}, m_{t+2}^d)}{1 + \pi_{t+1}} = u_c(c_t, m_{t+1}^d)$$

que indica que la utilidad marginal de demandar la cantidad dinero m_{t+1}^d al final del período t debe ser igual a la utilidad marginal del consumo del período t . Este beneficio marginal se divide dos: primero, la utilidad marginal del dinero como tal. Segundo, al demandar saldos reales éstos contribuyen con $\frac{1}{1 + \pi_{t+1}}$ recursos reales a la restricción de los individuos. Estos recursos por unidad de útiles, traídos a valor presente, son el segundo término del lado derecho.

- Adicionalmente, de las ecuaciones (5), (6) y (8) tenemos que:

$$\frac{u_m}{u_c} = \frac{i_{t+1}}{1 + i_{t+1}} \quad (10)$$

que en otras palabras muestra que la tasa marginal de sustitución entre el dinero y el consumo es igual a su precio: $\frac{i_{t+1}}{1 + i_{t+1}}$, el costo de oportunidad de mantener dinero en el bolsillo.

- En lugar de mantener dinero, los individuos podrían invertir en un bono público con un retorno nominal i . El retorno real sería $i/(1 + \pi)$. Como el pago se recibe en el período siguiente, éste debe ser traído a valor presente, luego el costo de oportunidad de mantener dinero es $\beta i/(1 + \pi)$.

3.4 Equilibrio Competitivo

- Un sistema de precios son unas secuencias de $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{i_t\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$. Tomando como exógenas las secuencias $\{g_t, t_t\}_{t=0}^{\infty}$ y como dados $d_0, k_0 > 0, m_0^s = m_0^d > 0$, un equilibrio competitivo es un sistema de precios y unas secuencia de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$, inversión $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$, endeudamiento del gobierno $\{d_t\}_{t=0}^{\infty}$, una secuencia positiva de oferta de dinero $\{m_t^s\}_{t=0}^{\infty}$ tales que:
 1. dado el sistema de precios y los impuestos, los individuos resuelven su problema de optimización con $m_t^d = m_t^s$. Es decir las ecuaciones (5)-(8) se cumplen.
 2. dado el sistema de precios las firmas maximizan beneficios. Es decir, las ecuaciones (1)-(2) se cumplen.
 3. el gobierno satisface su restricción de presupuesto en todo momento del tiempo
 4. la oferta agregada es igual a la demanda agregada: $y_t = c_t + i_t + g_t$.
- En lugar de estudiar la dinámica de esta economía en un contexto determinístico, nos vamos a concentrar en el análisis de su estado estacionario.
- Posteriormente, emplearemos una versión estocástica de esta economía (calibrada para la economía colombiana) con oferta de trabajo elástica, choques de productividad, de gasto público y choques monetarios.

3.5 Análisis de Largo Plazo

- En esta sección consideramos nuestra economía artificial en estado estacionario, es decir, en el largo plazo. Vamos a evaluar el poder predictivo de nuestro modelo. El modelo que tenemos aquí nos permite predecir qué ocurre cuando la política monetaria se conduce de una u otra forma. En este caso, hemos dicho que la tasa de crecimiento de la oferta monetaria es constante en el tiempo. ¿Intuitivamente, qué debemos esperar que ocurra con el consumo, la producción y los precios en esta economía?
- Recordemos que la evidencia acerca de la neutralidad monetaria: los datos muestran que hay una correlación cercana a uno entre inflación y tasa de crecimiento de los saldos reales, mientras que la correlación entre la tasa de crecimiento del dinero y la tasa de crecimiento del producto es cercana a cero. ¿Puede nuestro modelo replicar estos hechos?
- Ya sabemos que la política monetaria es poner a crecer la oferta nominal de dinero a una tasa $\mu_t = \mu$ en todos los períodos. Las condiciones de equilibrio son entonces:

$$u_c(c, m) - \lambda = 0 \quad (11)$$

$$u_m(c, m) - \lambda \left[1 + \frac{\beta}{1 + \mu} \right] = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1 + i}{1 + \mu} - [1 + F_k(k, 1) - \delta] = 0 \quad (13)$$

$$\lambda \left[\beta \frac{(1 + i)}{(1 + \mu)} - 1 \right] = 0 \quad (14)$$

$$F(k, 1) - c - \delta k = 0 \quad (15)$$

donde hemos usado el hecho que la tasa de inflación de estado estacionario es precisamente la tasa de crecimiento de los saldos nominales $\pi = \mu$. Para ver por que, recordemos que en estado estacionario

$m_{t+1} = m_t$ lo que implica que $\frac{m_{t+1}}{m_t} = 1$. Aplicando el hecho de que los saldos nominales crecen a la tasa μ para todo t - ecuación (4) obtenemos que la tasa π a la que deben crecer los precios es justamente μ :

$$\frac{m_{t+1}}{m_t} = \frac{M_{t+1}P_{t-1}}{M_tP_t} = e^{\mu-\pi} = 1 \Rightarrow \pi = \mu.$$

- Nótemos que empleando las ecuaciones (13) y (14) tenemos:

$$\frac{1}{\beta} - [1 + F_k(k, 1) - \delta] = 0.$$

- Para ver más claramente las implicaciones de este resultado, supongámos adicionalmente que F es Cobb-Douglas: $F(k_t) = k_t^\alpha$. En consecuencia, resolviendo para k :

$$k = \left[\frac{\alpha\beta}{1 + \beta(\delta - 1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (16)$$

que corresponde exactamente al stock de capital del estado estacionario del modelo básico!

- Dejamos como ejercicio derivar el consumo de estado estacionario, en el caso en que $F(k_t) = k_t^\alpha$. El resultado es:

$$c = \left[\frac{\alpha\beta}{1 + \beta(\delta - 1)} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \left[\frac{\alpha\beta}{1 + \beta(\delta - 1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (17)$$

- Adicionalmente, tenemos que:

$$1 + i = (1 + F_k(k, 1) - \delta)(1 + \pi) \quad (18)$$

lo que indica que, en el estado estacionario, la tasa de interés nominal de largo plazo es igual a la tasa de interés real de largo plazo ajustada por la inflación.

- Finalmente, supongamos que:

$$u(c_t, m_{t+1}) = [ac_t^{1-b} + (1-a)m_{t+1}^{1-b}]^{\frac{1}{1-b}}$$

con $0 < a < 1$ y $b > 0$, entonces el stock de dinero de estado estacionario es:

$$m = \left[\frac{a}{1-a} \right]^{\frac{1}{b}} \left[\frac{i}{1+i} \right]^{-\frac{1}{b}} c \quad (19)$$

y las transferencias de estado estacionario son:

$$t = m - \frac{m}{1+\mu} = \frac{\mu}{1+\mu}m.$$

- Observaciones de los resultados de largo plazo:

1. Al igual que en el modelo básico, el stock de capital es independiente de cualquier parámetro de la función de utilidad instantánea.
2. *Neutralidad*. En el equilibrio del modelo sólo aparecen los saldos *reales*. Esto significa que cambios en el nivel de la oferta de saldos nominales M^s son compensados exactamente por cambios en P , de tal forma que m se mantiene inalterado.
3. *Superneutralidad*. El stock de capital, y en consecuencia el producto, el consumo y el resto de variables reales, son independientes de la *tasa* de inflación y de la tasa de crecimiento de los saldos nominales.

4. El modelo DEFU, con oferta de trabajo inelástica, exhibe ambas propiedades: neutralidad y superneutralidad.
5. La superneutralidad se rompe cuando la oferta de trabajo es elástica y las preferencias no son separables en el consumo, dinero y ocio. La demostración de este resultado se deja como ejercicio.
6. En el largo plazo, la tasa de crecimiento monetario afecta la tasa de interés nominal de estado estacionario, i . En estado estacionario, ésta varía uno a uno con la tasa de inflación. (Ver también pie de página 13 del cap 2 en Walsh (2003, [4]) para cualificar esta conclusión en el caso de estar por fuera del estado estacionario.)

4 Dinero Ahorrando Costos de Transacción

- Ahora introducimos el dinero de una manera diferente. En vez de suponer que el dinero genera utilidad a los individuos, suponemos que el dinero es un activo que ahorra costos de transacción (en términos de recursos reales). La motivación es que realizar transacciones para obtener bienes de consumo es costoso, pero el dinero ayuda a reducir dichos costos.
- La estructura del sector productivo la mantenemos intacta con respecto al modelo anterior.

4.1 Individuos

- En cada período, los hogares pueden consumir la cantidad c_t de un bien acumulable obteniendo una utilidad $u(c_t)$ en el período corriente. Suponemos que las preferencias de los hogares son idénticas. Para realizar transacciones los hogares requieren de dinero nominal, M_t . Más específicamente, consumir c unidades del bien final resulta costoso; pero si los individuos emplean $m \equiv \frac{M}{P}$ unidades del bien final para realizar transacciones reducen los costos de transacción en $\phi(c, m)$ unidades del bien final.
- La función ϕ suponemos que es dos veces continuamente diferenciable y que tiene las siguientes propiedades para $c, m \geq 0$:
 - $\phi(0, m) = 0$: si los individuos no consumen, entonces no pagan los costos de transacción.
 - $\phi_c \geq 0$, $\phi_m \leq 0$, $\phi_{cc}, \phi_{mm} \geq 0$: los costos de transacción aumentan a una tasa creciente en la medida en que el consumo aumenta y el dinero tiene rendimientos positivos pero decrecientes ahorrando costos de transacción.
 - $\phi_{cm} \leq 0$: el costo marginal de transacción asociado al consumo adicional no aumenta en la medida en que los saldos reales aumentan
 - $\lim_{m \rightarrow 0} \phi_m(c, m) = -\infty$: el dinero es esencial y por lo tanto es demandado en cantidades positivas.
- La oferta de trabajo seguimos suponiendo que es inelástica.
- Así, modificamos entonces el problema del individuo (con respecto al modelo anterior) en dos aspectos: primero, el dinero ya no genera utilidad directamente, sino que ahorra recursos reales. La función de utilidad depende sólo del consumo y la restricción presupuestal de los individuos debe tener en cuenta estos costos de transacción:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a

$$c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t + \left(m_{t+1} - \frac{m_t^d}{1 + \pi_t} \right) + t_t + d_{t+1} - \frac{d_t}{1 + \pi_t} + \phi(c_t, m_{t+1}^d) \leq w_t + r_t k_t + \frac{i_t d_t}{1 + \pi_t}$$

- Construyendo el Lagrangiano y derivando con respecto a $c_t, m_{t+1}^d, k_{t+1}, d_{t+1}$:

$$u_c(c_t) - \lambda_t [1 + \phi_c(c_t, m_{t+1}^d)] = 0 \quad (20)$$

$$-\lambda_t [1 + \phi_m(c_t, m_{t+1}^d)] + \frac{\beta \lambda_{t+1}}{1 + \pi_{t+1}} = 0 \quad (21)$$

$$-\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} (1 + r_{t+1} - \delta) = 0 \quad (22)$$

$$-\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} \frac{(1 + i_{t+1})}{(1 + \pi_{t+1})} = 0 \quad (23)$$

$$k_0, m_0^d > 0, d_0 \text{ dados}$$

- Para analizar los efectos del dinero en esta economía notemos que combinando las ecuaciones (20)-(22) tenemos:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1 + r_{t+1} - \delta) \left[\frac{1 + \phi_c(c_t, m_{t+1})}{1 + \phi_c(c_{t+1}, m_{t+2})} \right]$$

- Si el dinero no existiera en el modelo, el término entre las llaves desaparecería y el precio relativo intertemporal del consumo dependería en equilibrio de la tasa de interés real (neta de depreciación) y el factor de descuento. En una economía con dinero, éste actúa como una distorsión intertemporal a las decisiones de consumo y ahorro. La inflación (y en este caso la depreciación de la moneda) actúa como un impuesto distorsivo a las decisiones de consumo de los agentes privados. Al igual que en el caso del impuesto al ingreso de los hogares, los acontecimientos en el mercado monetario afectan las decisiones de consumo y ahorro de las familias.

4.2 El Estado

- El balance del sector público consolidado (bajo los mismos supuestos del modelo anterior) tenemos que en términos reales es:

$$-t_t = m_{t+1}^s - \frac{m_t^s}{1 + \pi_t} + \phi(c_t, m_{t+1}), \forall t$$

- Lo que implica que estamos suponiendo que el Estado recolecta estos costos de transacción. De lo contrario, y esto puede ser factible también, dichos costos generan un “deadweigh loss” para la sociedad.

4.3 Equilibrio Competitivo

- Un sistema de precios son unas secuencias de $\{r_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{i_t\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$. Tomando como exógenas las secuencias $\{g_t, t_t\}_{t=0}^{\infty}$ y como dados $d_0, k_0 > 0, m_0^s = m_0^d > 0$, un equilibrio competitivo es un sistema de precios y unas secuencia de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$, inversión $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$, endeudamiento del gobierno $\{d_t\}_{t=0}^{\infty}$, una secuencia positiva de oferta de dinero $\{m_t^s\}_{t=0}^{\infty}$ tales que:

1. dado el sistema de precios y los impuestos, los individuos resuelven su problema de optimización con $m_t^d = m_t^s$. Es decir las ecuaciones (20)-(23) se cumplen.
2. dado el sistema de precios las firmas maximizan beneficios. Es decir, las ecuaciones (1)-(2) se cumplen.
3. el gobierno satisface su restricción de presupuesto en todo momento del tiempo
4. la oferta agregada es igual a la demanda agregada: $y_t = c_t + i_t + g_t$.

5 El Costo en Bienestar de la Inflación

- El modelo DEFU supone que los individuos derivan utilidad de los saldos reales. Como la inflación reduce los saldos reales, entonces por construcción la inflación reduce el bienestar de los individuos.
- El modelo DACT supone que el mantener saldos reales ahorra costos de transacción. Como la inflación reduce los saldos reales, aumenta los costos de transacción reduciendo la disponibilidad de recursos para los individuos y en consecuencia afectando su bienestar. La inflación actúa como un impuesto a las tenencias de dinero.
- Con los dos modelos podemos contestar las siguientes preguntas:
 1. ¿Existe una tasa de inflación (y por ende de crecimiento monetario) tal que maximice la utilidad de estado estacionario de los individuos? Regla de Friedman.
 2. ¿Qué tan grande es el costo en bienestar de la inflación en Colombia? Restrepo (2005, [3]).

5.1 Tasa de Inflación Óptima

- Un Banco Central podría estar interesado en la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuál es la tasa de inflación (o de crecimiento de los saldos nominales) que maximiza el bienestar de los individuos en el largo plazo?
- La respuesta es aquella tasa que resuelve el siguiente problema de estado estacionario:

$$\tilde{\mu} \equiv \min_{\mu} u(c, m) \text{ sujeto a } c = F(k, 1) - \delta k.$$

- La condición de primer orden es:

$$u_c(c, m) \frac{\partial c}{\partial \mu} + u_m(c, m) \frac{\partial m}{\partial \mu} = 0.$$

- Como se mostró anteriormente, c es independiente de μ y $\frac{\partial m}{\partial \mu} \neq 0$, entonces:

$$u_m(c, m) = 0.$$

- Recordemos que la ecuación (10) en estado estacionario dice que:

$$\frac{u_m}{u_c} = \frac{i}{1+i},$$

y en consecuencia $u_m = 0$ sólo si la tasa de interés nominal es cero, $i = 0$.

- Por lo tanto la tasa de inflación óptima, es:

$$\pi = -\frac{r}{1+r} \approx -r$$

una deflación igual a la tasa de interés real. Este resultado se conoce como “regla de Friedman”, debido a Friedman (1969, [1]).

- La regla de Friedman es óptima porque, en este caso las transferencias son de suma fija. Cuando existen impuestos distorsivos, la inflación óptima puede desviarse de la regla de Friedman, ya que la inflación es una fuente de ingresos tributarios para el gobierno. Dado un nivel de gasto, una inflación diferente de la regla de Friedman, reduciría las distorsiones que generarían los impuestos. Este resultado se debe a Phelps (1973, [2]).

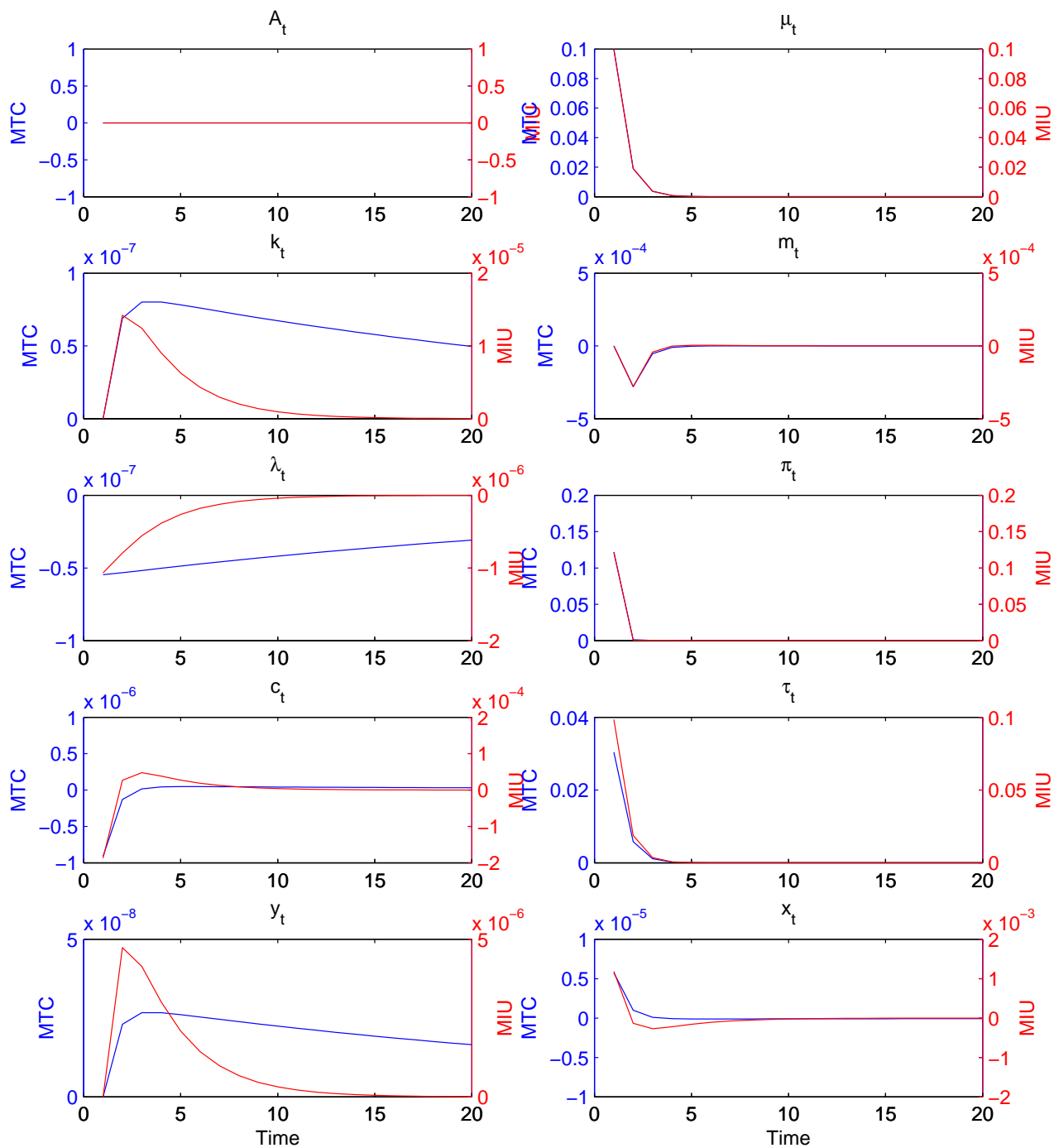
5.2 Costo en Bienestar de la Inflación en Colombia

- Ver la revisión de la literatura en Restrepo (2005).
- Ella calcula el costo en bienestar de la inflación empleando un modelo de equilibrio general para una economía pequeña y abierta con precios rígidos. Encuentra que bajar la tasa de inflación de aproximadamente el 6% al 3% (la meta de inflación de largo plazo del Banco de la República en Colombia) es equivalente a compensar a los individuos con un aumento del stock de capital cercano al 1%.
- Otros estudios encuentran costos más bajos dado que no tienen rigideces de precios y su análisis es basado en modelos para economías cerradas.

6 Dinero y Ciclos Económicos

- Usando ambos modelos calibrados para Colombia, mostrar el ajuste de corto plazo ante:
 - un choque monetario
 - un choque de productividad
- La figura muestra la respuesta de ambos modelos ante un choque monetario:

Figure 1: Respuesta de los Modelos DEFU y DACT ante un Choque Monetario



- Calcular segundos momentos de los modelos DEFU y DACT.
- Mostrar los ciclos económicos que se generan en estas economías artificiales para los valores ajustados de un proceso estocástico para μ_t en Colombia.

7 Ejercicios

1. (*Economía de dotaciones*). En el modelo DEFU, suponga que no existen firmas. El único bien que dispone la economía es un bien perecedero y debe consumirse durante el período t . Es decir, los agentes no pueden acumular capital. La cantidad del bien disponible es $y_t = y, \forall t$ igual para todos los agentes. Los únicos activos acumulables con los que disponen los agentes son bonos públicos, d_t y dinero m_t . El dinero genera utilidad. Trabaje las siguientes preguntas:

- (a) Plantee el problema del individuo representativo y encuentre las condiciones de primer orden.
- (b) Defina el equilibrio competitivo
- (c) ¿Qué diferencias encuentra usted frente al modelo DEFU?

2. (*Shopping Time*) Consideremos un ambiente idéntico al de la pregunta anterior, pero ahora supongamos que los individuos no derivan utilidad del dinero, sino del ocio en el momento t , o_t . La función de utilidad es $u(c_t, o_t)$ con $u_c, u_o > 0$, $u_{cc}, u_{oo} < 0$ y $u_{co} \geq 0$. Los individuos *gastan tiempo comprando* bienes de consumo. La cantidad de tiempo s_t que necesitan para comprar cierta cantidad c_t de bienes de consumo se supone que se relaciona negativamente con las tenencias de saldos reales, m_{t+1} . Específicamente:

$$s_t = h(c_t, m_{t+1})$$

con $h, h_c, h_{cc}, h_{mm} \geq 0$ y $h_m, h_{cm} \leq 0$. Con una unidad de tiempo disponible tenemos que $1 = o_t + s_t$. Trabaje las siguientes preguntas:

- (a) Plantee el problema de los individuos y las acciones del gobierno.
 - (b) Encuentre las condiciones de primer orden del problema de los individuos.
 - (c) Defina el equilibrio competitivo
 - (d) ¿Qué similitudes y/o diferencias encuentra con respecto al modelo de la pregunta anterior?
3. (*Cash in Advance*) Consideremos un ambiente idéntico al primer punto, pero ahora los agentes no derivan utilidad del dinero, sólo del consumo. La razón por la cual los individuos demandan dinero es que éste es requerido para poder comprar el bien de consumo. El agente no puede consumir su propia producción y debe comprarla de alguien más en el mercado con dinero en efectivo. Como no hay inversión, las únicas compras son las compras de bienes de consumo, $P_t c_t$. Dichas compras deben ser realizadas con *el dinero disponible por adelantado*, M_t . Trabaje las siguientes preguntas:

- (a) Plantee el problema del individuo y las acciones del gobierno.
- (b) Encuentre las condiciones de primer orden del problema de los individuos.
- (c) Defina el equilibrio competitivo.
- (d) ¿Qué similitudes y diferencias encuentra con los problemas anteriores?

Pista: Trabajar el problema con la restricción nominal puede ser útil.

4. (*Demanda de Dinero*) Derive y compare las demandas de dinero para los siguientes casos:

(a) DEFU, tomando la siguiente función de utilidad:

$$u(c_t, m_{t+1}) = [ac_t^{1-b} + (1-a)m_{t+1}^{1-b}]^{\frac{1}{1-b}}$$

con $0 < a < 1$ y $b > 0, b \neq 1$.

(b) DACT, tomando la siguiente función de costos de transacción:

$$\phi(c_t, m_{t+1}) = \kappa \left(\frac{c_t}{m_{t+1}} \right)^\gamma$$

con $\kappa > 0$ y $\gamma > 0$.

(c) CIA, tomando la siguiente función de utilidad:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

con $\gamma > 0, \gamma \neq 1$.

References

- [1] Milton Friedman. The optimum quantity of money. In *The Optimum Quantity of Money and Other Essays*. Aldine, 1969.
- [2] Edmund Phelps. Inflation in the theory of public finance. *Swedish Journal of Economics*, 75(1), 1973.
- [3] Paulina Restrepo. Borradores de Economía. Technical Report 328, Banco de la República, 2005.
- [4] Carl E. Walsh. *Monetary Theory and Policy*. The MIT Press, second edition, 2003.