

# Capítulo 6: Medición y Ciclos Económicos en Economías Pequeñas y Abiertas\*

Franz Hamann

25 de mayo de 2005

## 1. Introducción

- La medición de las transacciones internacionales en una economía es fundamental para determinar las regularidades empíricas que queremos explicar. Al mismo tiempo los modelos son herramientas esenciales para la medición.
- Una de las herramientas de medición más comunes es la Balanza de Pagos. Iniciamos describiendo los aspectos contables de la Balanza de Pagos y posteriormente formalizamos el concepto en el marco de nuestro modelo básico.

## 2. Aspectos Contables de la Balanza de Pagos

- La Balanza de Pagos registra las transacciones de los residentes de un país con el resto del mundo durante un período de tiempo.<sup>1</sup> En Colombia la calcula trimestralmente el Banco de la República. En la mayoría de los países lo hace la entidad encargada de llevar las estadísticas de la economía.
- Hay tres elementos importantes para entender la contabilidad de la Balanza de Pagos:
  1. El concepto de “residencia”
  2. El método de contabilidad de partida doble

---

\*Este documento es estrictamente personal y de uso académico. En ningún momento comprometo al Banco de la República, su Junta Directiva o cualquier otra persona del Banco. La parte del modelo básico de economía pequeña y abierta en el caso determinístico sigue muy de cerca las notas de Alvaro Riascos, las cuales se encuentran disponibles en su website. Agradezco a él su amabilidad al facilitarme sus notas. Igualmente agradezco la colaboración de Jesús Bejarano y Jorge Martinez, quienes me ayudaron a recolectar la información estadística. Los errores y cualquier tipo de apreciación contenidos en este documento son exclusivamente de mi responsabilidad.

<sup>1</sup>Los residentes de una economía son los hogares, entidades jurídicas y sociales, instituciones sin ánimo de lucro y el gobierno de dicha economía.

### 3. La valoración y el momento de registro.

- El concepto de residencia es el mismo empleado para las cuentas nacionales. Un agente es residente de una economía cuando éste tiene un centro de interés económico en un territorio económico.<sup>2</sup> El método de partida doble consiste en que cada transacción se registra en dos cuentas: débito y crédito. La valoración se hace a precios de mercado. Para definir el momento de la transacción se adopta el criterio de traspaso de la propiedad que es el momento en el que las partes involucradas las registran en sus libros.<sup>3</sup>
- La Balanza de Pagos tiene principalmente dos componentes: la Cuenta Corriente (CC) y la Cuenta Financiera (CF).<sup>4</sup>
- La CC registra: las importaciones y exportaciones de bienes y servicios, los pagos netos a los factores y las transferencias unilaterales netas. Las exportaciones y la recepción de pagos a los factores entran con signo positivo. Las importaciones y la salida de pagos a los factores entran con signo negativo.
- La CF registra las ventas de activos a no residentes y las compras (por parte de residentes) de activos localizados en el exterior. En consecuencia la CF mide los cambios en los activos externos netos de un país. Las ventas de activos a extranjeros entran con signo positivo y las compras de activos externos entran con signo negativo.
- *Ejemplo 1:* un colombiano importa un carro Volkswagen de Alemania por U\$25.000, entonces la CC cae en U\$25.000. El registro en la cuenta de capital depende de cómo se pague el carro. Supongamos que el colombiano le paga a Volkswagen Alemania con dólares en efectivo. VW Alemania está comprando “activos colombianos” (dólares) por U\$25.000. La CF aumenta en U\$25.000.
- *Ejemplo 2:* un colombiano se va de paseo a Miami y se hospeda en el Comfort-Inn por una noche. Paga la noche de hotel por U\$80 con su tarjeta de crédito Visa. En este caso el colombiano está importando un servicio (servicio de hospedaje en el hotel), la CC cae en U\$80. Por otro lado, el Comfort-Inn está comprando un activo financiero colombiano (la promesa de Visa-Colombia de honrar el pago del servicio por U\$80). La CF de Colombia aumenta en U\$80.
- *Ejemplo 3:* un colombiano “ilegal” en Estados Unidos le gira a su abuelita (residente en Colombia) U\$200 dólares. Aumentan las transferencias en 200 y la CC aumenta en dicha

---

<sup>2</sup>Un centro de interés económico es una zona geográfica donde los residentes de una economía desarrollan su actividad productiva durante un período prolongado. Un territorio económico es un territorio geográfico administrado por un gobierno.

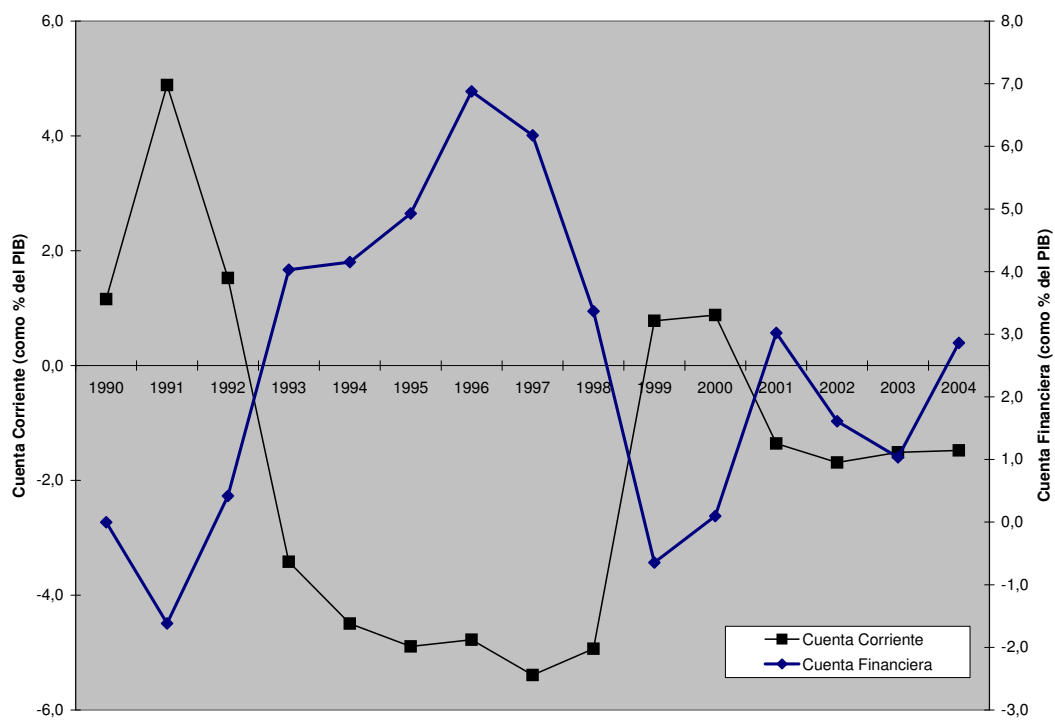
<sup>3</sup>Típicamente el traspaso de la propiedad no coincide con el pago, en cuyo caso lo que ocurre es una operación de financiamiento. Para más detalles ver Lora (1991).

<sup>4</sup>En otros tiempos (antes de Julio de 1999) esta era la llamada “cuenta de capital”. Muchos textos emplean este nombre dado que la metodología anterior del Fondo Monetario así lo indicaba. Para nuestros efectos usaremos indistamente los términos cuenta de capital o cuenta financiera a menos que indiquemos lo contrario.

cantidad. El Banco receptor en Colombia compra activos financieros Norteamericanos, la CF de Colombia cae en 200.

- *Ejemplo 4:* Bavaria compra una cervecera en el extranjero por 500 millones de dólares financiando la compra con deuda externa. La inversión extranjera directa (IED) de Colombia cae en 500 millones, reduciendo la cuenta financiera en 500. Por otro lado, el endeudamiento externo de Colombia aumenta en 500 millones. Esto aumenta la cuenta financiera en 500, contrarrestando el efecto de la IED.
- *Ejemplo 5:* La venta de Bavaria. Sus accionistas (residentes en Colombia) venden acciones a una compañía cervecera internacional por 6000 millones de dólares. Esto es, la IED aumenta en 6000, y ésta se registra en la cuenta financiera. El reflejo de esta transacción depende de qué haga Bavaria con los 6000 millones. Supongamos que Bavaria usa la mitad para comprar bonos externos y la otra mitad para pagar deuda externa. La inversión en cartera cae en 3000 (por la compra de bonos) y el endeudamiento externo cae en otros 3000. Como ambas cuentas corresponden a la cuenta financiera, ésta cae en 6000, compensando los 6000 de IED.
- Usualmente, queremos distinguir las transacciones del Estado de las de los Agentes Privados. La Balanza de Transacciones Oficiales captura dichas transacciones. Dicha Balanza se conoce en Colombia como la “Variación de Reservas Internacionales Brutas”.
- En la realidad la Balanza de Pagos no registra todas las transacciones entre residentes y el resto del mundo. Algunas cuentas de la Balanza de Pagos se calculan empleando encuestas y usando información diferente a los registros contables de las transacciones. Esto causa que en la práctica la suma de la CC, la CF y la variación en reservas no sea exactamente igual a cero.
- La Balanza de Pagos de Colombia en los últimos 15 años muestra la siguiente evolución:
- La estructura contable de la Balanza de Pagos de Colombia es:

Figura 1: Balanza de Pagos Colombiana 1990-2004



Fuente: Banco de la República, cálculos de Jorge Martínez.

## Cuadro 1: Estructura Contable Balanza de Pagos de Colombia

### 1. Cuenta Corriente

- a) Exportaciones e Importaciones de Bienes
- b) Exportaciones e Importaciones de Servicios No Financieros (o Servicios No Factoriales)
- c) Exportaciones o Importaciones de Servicios Financieros (o Renta de los Factores)
- d) Transferencias

### 2. Cuenta de Capital

- a) Flujos de Capital de Largo Plazo (más de 1 año)
  - 1) Inversión Directa
  - 2) Inversión de Cartera (Bonos, acciones, etc)
  - 3) Endeudamiento Externo
- b) Flujos de Capital de Corto Plazo (menos de 1 año)
  - 1) Endeudamiento Externo
  - 2) Movimientos de Activos (CD's de colombianos en el exterior)

### 3. Variación de Reservas Internacionales

### 4. Errores y Omisiones

## 3. Aspectos Institucionales de la Balanza de Pagos 1990-2005

- En los años 90 Colombia, como muchos ME's, profundiza su proceso de integración a los mercados internacionales. Dicho proceso se conoció como "Apertura Económica e Internacionalización de la Economía". Básicamente dicho proceso consistió en liberar la cuenta corriente y financiera, acompañado de una serie de "Reformas Estructurales" de la economía.
- Hacemos un resumen de los principales cambios institucionales que afectaron la Balanza de Pagos.
- Por el lado de la Cuenta Corriente (Proceso de Apertura):
  1. Eliminación de las restricciones administrativas a las operaciones de comercio exterior.

2. Reducción sustancial de las tarifas arancelarias. Las tasas de protección efectivas pasaron del 90 % en 1989 a 19.4 % en 1999.
  3. Fortalecimiento de acuerdos comerciales
    - a) Acuerdo de complementación económica (ACE24): Colombia y Chile (1993)
    - b) Grupo de los 3 (G3): Colombia, Venezuela y México (1994)
    - c) Comunidad Andina de Naciones (CAN): Colombia, Bolivia, Ecuador, Perú y Venezuela (1996)
    - d) Acuerdo de Complementación Económica (ACE54): Colombia, Argentina, Brasil, Paraguay y Uruguay.
    - e) APTDEA: Hasta el 31 de diciembre de 2006 permite que más de 6000 productos colombianos entren libres de aranceles a los Estados Unidos.
  4. Flexibilización del Régimen Cambiario
    - a) Eliminación de procedimientos administrativo
    - b) Descentralización de Operaciones y Controles Cambiarios
    - c) Mayor influencia del mercado en la determinación de la tasa de cambio (Banda Cambiaria 1994-99)
    - d) Abandono de la Banda en Septiembre de 1999 (mecanismo de subastas)
- Por el lado de la Cuenta Financiera (Proceso de Privatización y Liberalización Financiera):
    1. Flexibilización del régimen de inversión extranjera
      - a) Eliminación de requisitos y restricciones a la remisión de utilidades.
      - b) Autorización para la inversión extranjera en el sistema financiero
    2. Estrategia de endeudamiento externo
      - a) Sustitución de deuda externa por interna
      - b) Controles a la entrada de capital especulativo

## 4. El Modelo Básico de Economía Pequeña y Abierta y la Balanza de Pagos

- Supuestos Fundamentales del modelo:
  1. Existe integración financiera perfecta:
    - a) los capitales son perfectamente móviles entre la economía pequeña y el resto del mundo
    - b) no existen costos de ajuste de los activos (capital y activos externos netos)

- c) compromiso absoluto de honrar los contratos. No es posible el *default*. Cuando es posible hacer *default* de la deuda, la tasa de interés que enfrenta la economía en los mercados internacionales es más alta que la tasa libre de riesgo.
  - 2. Existe previsión perfecta. En presencia de incertidumbre los resultados dependen de la estructura de los mercados financieros.
  - 3. No hay distorsiones intertemporales (términos de intercambio, impuestos distorsivos, tarifas, etc.).
- Los principales resultados del modelo son:
    1. Los agentes suavizan perfectamente su consumo que depende del valor presente de los ingresos futuros (ingreso permanente).
    2. No hay dinámica de transición. La economía se ajusta instantáneamente.
    3. En general, los consumidores ahorran e invierten en buenos tiempos (ingresos alto) y desahorran y no invierten en malos tiempos (ingreso bajo).
    4. La respuesta de la economía ante choques tecnológicos no anticipados:
      - a) Choques permanentes: un choque positivo es acomodado consumiendo más, endeudándose más e invirtiendo más. El ahorro cae.
      - b) Choques transitorios: un choque positivo es acomodado ahorrando más y consumiendo más, pero también invirtiendo más.
    5. Dependiendo de qué tanto duren los efectos positivos, el efecto inversión puede dominar al efecto endeudamiento. En resumen, entre más largos sean los buenos tiempos, hay más inversión y más endeudamiento y la cuenta corriente es contracíclica. Entre más cortos sean los buenos tiempos, hay menos inversión y menos endeudamiento y domina el efecto ahorro y la cuenta corriente es procíclica.

## 4.1. El Modelo Básico

- A continuación presentamos la versión centralizada del modelo básico de economía pequeña y abierta. Descentralizamos esta economía en el ejercicio 1.
- Supongamos que existe un individuo representativo y un único bien que puede ser consumido  $c_t$  o invertido  $i_t$ . El consumidor sólo obtiene utilidad  $u$  de consumir.<sup>5</sup>
- La capacidad productiva de esta economía se puede representar como una función de producción agregada  $y_t = F(k_t)$  donde  $y_t$  es el PIB.<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>Las preferencias están descritas por la función de utilidad instantánea  $u$ , que suponemos es continuamente diferenciable y creciente en  $c_t$  y estrictamente cóncava. Adicionalmente,  $\lim_{c \rightarrow 0} u_c(c) = \infty$ .

<sup>6</sup> $F : R_+ \rightarrow R$  y es continuamente diferenciable, monótonamente creciente y cóncava en  $k$ . Si no se emplea capital no se produce:  $F(0) = 0$ .  $F_k > 0 \forall k > 0$ . Finalmente, las condiciones: de Inada  $\lim_{k \rightarrow 0} F_k(k) = \infty$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(k) = 0$ .

- El stock de capital se deprecia a una tasa constante  $\delta \in [0, 1]$  y la dinámica del capital es:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

donde  $i_t$  es la inversión durante el período  $t$ .

- A diferencia del caso de la economía cerrada, el consumidor tiene acceso al mercado de capitales internacional donde puede comprar o vender sin restricciones, a los precios dados por el mercado internacional, un activo libre de riesgo. El retorno de dicho activo libre de riesgo es  $r$  y lo suponemos constante en todo momento del tiempo. Denotamos  $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$  la tenencia neta de activos internacionales al comienzo del período  $t$ . Nótese que si  $b_t < 0$  el país es un deudor neto, mientras que si  $b_t > 0$  el país es un acreedor neto.

- El problema del agente representativo es:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (1)$$

sujeto a:

$$b_{t+1} \leq (1 + r)b_t + F(k_t) - c_t - i_t \quad (2)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (3)$$

$$k_t \geq 0$$

$b_0, k_0$  dados.

- Como hemos supuesto que  $u$  es estrictamente creciente, es claro que en el óptimo la restricción de desigualdad se cumple con igualdad. Emplearemos cualquiera de las dos indistintamente.
- El conjunto de restricciones:

$$b_{t+1} \leq (1 + r)b_t + F(k_t) - c_t - i_t \text{ para } t = 0, 1, 2, \dots$$

la llamaremos restricción de recursos para diferenciarla de la restricción de recursos intertemporal que introduciremos más adelante.

- El problema anterior no tiene solución si no imponemos alguna restricción sobre el nivel de endeudamiento del agente representativo para evitar estrategias de Ponzi. Supongamos que a las restricciones anteriores adicionamos (Condición de No-Ponzi):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b_t}{(1 + r)^t} \geq 0,$$

que indica que los mercados financieros no admiten que la deuda de esta economía crezca hasta infinito (endeudarse para cubrir perpetuamente el servicio de la deuda no está permitido).

- Como veremos más adelante, bajo estas condiciones siempre existe una solución al problema de optimización.
- Ahora notemos como este modelo tan simple se puede relacionar con los conceptos contables de la Balanza de Pagos introducidos anteriormente.

## 4.2. La Balanza de Pagos en el Modelo Básico

- La estructura contable de la Balanza de Pagos nos permite formalizar la relación entre la Cuenta Corriente, la Cuenta Financiera y la Variación en Reservas (abstrayendo de la existencia de Errores y Omisiones) como:

$$CC_t + CF_t = \Delta F_t^B$$

donde  $\Delta F_t^B$  denota la variación en los activos externos del Banco Central durante el período  $t$ .

- Cuando  $CC_t < 0$  estamos disminuyendo nuestros activos externos. Paralelamente, estamos exportando activos al exterior  $CF > 0$ . Esta situación se conoce como “entradas de capital”.
- Cuando  $CC_t > 0$  estamos aumentando nuestros activos externos. Paralelamente, estamos importando activos al exterior  $CF < 0$ . Esta situación se conoce como “salidas de capital”.
- Cuando la Cuenta Corriente está en superávit  $CC > 0$  pero la Cuenta Financiera está en equilibrio  $CF = 0$ , necesariamente es porque el Banco Central acumula Reservas Internacionales  $\Delta F^B > 0$ . Cuando las entradas de capital no se reflejan en la CF es porque el Banco Central está acumulando Reservas Internacionales.
- Como en nuestro modelo no hay Banco Central, ni gobierno, las reservas internacionales son cero y no existen operaciones ni transacciones del sector oficial.  $F_t^B = 0, \forall t$  y  $\Delta F_t^B = 0, \forall t$ .
- En el modelo básico hay un solo activo externo,  $b$ , en consecuencia la CC al ser definida como la variación en la posición neta de nuestros activos externos netos, ésta no es otra cosa sino:

$$CC_t = b_{t+1} - b_t$$

luego:

$$CC_t = rb_t + y_t - c_t - i_t.$$

- La balanza comercial la definimos como:

$$TB_t \equiv y_t - c_t - i_t$$

luego:

$$TB_t + rb_t = CC_t$$

- El Producto Nacional Bruto (ingreso) es por definición:

$$PNB_t = y_t + rb_t.$$

- El ahorro lo definimos:

$$s_t \equiv y_t - c_t + rb_t$$

luego otra forma de ver la Cuenta Corriente es:

$$CC_t = s_t - i_t.$$

- Cuando la economía es cerrada:

$$s_t = i_t \Rightarrow CC_t = 0, \forall t.$$

### 4.3. Caracterización de la Solución del Modelo

- Para utilizar formalmente el método de Lagrange primero tenemos que escribir el problema en su forma general. Por el momento abstraemos de la condición de No-Ponzi:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a:

$$b_{t+1} = (1+r)b_t + F(k_t) - c_t - i_t$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

$$k_t \geq 0$$

$$b_0, k_0 \text{ dados.}$$

- Las variables de estado son el stock de capital al inicio del periodo,  $k_t$  y el stock de activos externos netos al comienzo del período,  $b_t$ . Las variables de control son el consumo y la inversión. Sea  $r(c_t, i_t) = u(c_t)$  y  $g(b_t, k_t, c_t, i_t) = ((1+r)b_t + F(k_t) - c_t - i_t, (1-\delta)k_t + i_t)$ . Entonces las condiciones de primer orden necesarias son:

$$\begin{aligned} \lambda_t^1 &= \beta(1+r)\lambda_{t+1}^1 \\ \lambda_t^2 &= \beta(\lambda_{t+1}^1 F'(k_{t+1}) + \lambda_{t+1}^2(1-\delta)) \\ u'(c_t) &= \beta\lambda_t^1 \\ \lambda_{t+1}^1 &= \lambda_{t+1}^2 \\ b_{t+1} &= (1+r)b_t + F(k_t) - c_t - i_t \\ k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t \\ t &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

y simplificando tenemos:

$$u'(c_t) = \beta(1+r)u'(c_{t+1}) \quad (4)$$

$$r = (F'(k_{t+1}) - \delta) \quad (5)$$

$$b_{t+1} = (1+r)b_t + F(k_t) - c_t - i_t \quad (6)$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \quad (7)$$

$$t = 0, 1, 2, \dots$$

- Nótese que la solución depende de la relación entre el factor de descuento y la tasa de interés libre de riesgo:
  - Si  $\beta = (1+r)^{-1}$  entonces  $c_t = c_{t+1} = c$ .
  - Si  $\beta < (1+r)^{-1}$  entonces  $c_t < c_{t+1}$ .
  - Si  $\beta > (1+r)^{-1}$  entonces  $c_t > c_{t+1}$ .

#### 4.4. Sostenibilidad del Endeudamiento y la Condición de No-Ponzi

- Otra forma de plantear la restricción de recursos en el problema del agente representativo en esta economía pequeña y abierta es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 b_{t+1} - (1+r)b_t &\leq y_t - c_t - i_t \\
 \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{b_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} - \frac{(1+r)b_t}{(1+r)^{t+1}} \right) &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{y_t - c_t - i_t}{(1+r)^{t+1}} \right) \\
 -b_0 &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{y_t - c_t - i_t}{(1+r)^{t+1}} \right) \\
 -(1+r)b_0 &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{y_t - c_t - i_t}{(1+r)^t} \right) \\
 \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{c_t + i_t}{(1+r)^t} \right) &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{y_t}{(1+r)^t} \right) + (1+r)b_0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

que se traduce en una *restricción de recursos intertemporal*. Dicha restricción intertemporal indica que el valor presente de los gastos futuros (en bienes de consumo e inversión) no pueden exceder el valor presente del ingreso futuro más la riqueza inicial.

- Otra interpretación es: en el caso en el que  $b_0 < 0$ , en valor presente la economía debe honrar sus deudas.
- Obsérvese que es fundamental que no exista ninguna restricción sobre  $b_t$  diferente a la que impone la condición de No-Ponzi. En una economía donde no se cumpla la condición de No-Ponzi, perfectamente podría ocurrir lo contrario a lo que refleja la restricción de recursos intertemporal.

- Como la función de utilidad es estrictamente creciente, en el óptimo la restricción de recursos intertemporal se cumple con igualdad.
- EJEMPLO 1. (*Sostenibilidad del Endeudamiento*). Recordemos que  $TB_t = y_t - c_t - i_t$ . La restricción de recursos intertemporal nos permite identificar niveles de endeudamiento consistentes con el crecimiento de largo plazo de la economía. Supongamos que en el largo plazo el producto crece a una tasa  $g$ ,  $y_{t+1} = (1+g)y_t$ . Si todos los demás agregados crecen a una tasa constante, ésta debe ser la tasa  $g$ . ¿Por qué? En consecuencia:

$$\frac{TB_t}{y_t} = \frac{(r-g)b_s}{y_s}. \quad (9)$$

Es decir la balanza comercial como proporción del producto debe compensar, sólo una parte del endeudamiento relativo al producto. El segundo término es una medida del peso de la deuda como proporción del PIB. Entre mayor sea este más difícil será repagar la deuda.

- EJEMPLO 2. (*La Posibilidad de Déficit Permanentes*). ¿Puede un país tener permanentemente déficits comerciales? Para responder observemos que la restricción de recursos intertemporal se puede escribir como:

$$(1+r)b_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{-TB_t}{(1+r)^t} \right)$$

Entonces un país puede tener un déficit comercial permanente,  $TB_t < 0, \forall t$  sólo si su riqueza inicial es positiva,  $b_0 > 0$ . Por el contrario, si el país es un deudor inicial neto,  $b_0 < 0$ , necesariamente debe generar superávits comerciales futuros.

## 4.5. La Solución Completa del Modelo

- Utilizando la equivalencia entre la restricción de recursos y la restricción de recursos intertemporal, podemos escribir el problema del agente representativo en la economía pequeña y abierta como:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t}{(1+r)^t} \right) = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{F(k_t)}{(1+r)^t} \right) + (1+r)b_0.$$

- Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \beta^t u'(c_t) &= \frac{\Lambda}{(1+r)^t} \Rightarrow u'(c_t) = \beta(1+r)u'(c_{t+1}) \\ r &= F'(k_{t+1}) - \delta \\ \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t}{(1+r)^t} \right) &= \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{F(k_t)}{(1+r)^t} \right) + (1+r)b_0 \\ t &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- Por simplicidad, vamos a suponer que  $\beta(1+r) = 1$ . Supongamos adicionalmente que la función de producción se puede escribir como:

$$F(k_t) = A_t f(k_t)$$

donde  $A_t$  es un choque previsible a la productividad total de los factores. La solución del modelo se puede obtener observando lo siguiente:

- El capital queda determinado por:

$$r = A_{t+1} f'(k_{t+1}) - \delta, \forall t \quad (10)$$

y depende exclusivamente de los choques de productividad.

- La inversión:

$$i_t = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t.$$

- Como  $\beta(1+r) = 1$  entonces  $c_t = c_{t+1} = c$ . En cuyo caso la restricción de recursos intertemporal es:

$$c = \frac{r}{1+r} \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{A_t f(k_t) - (k_{t+1} - (1 - \delta)k_t)}{(1+r)^t} \right) + r b_0$$

que indica que el consumo es igual al ingreso permanente más los rendimientos de los activos externos netos iniciales.

- Los activos:

$$b_{t+1} = (1+r)b_t + A_t f(k_t) - (k_{t+1} - (1 - \delta)k_t) - c, \forall t \text{ con } b_0 \text{ dado.}$$

- La cuenta corriente:

$$CC_t = b_{t+1} - b_t, \forall t.$$

- El ahorro:

$$s_t = A_t f(k_t) + r b_t - c, \forall t.$$

- Notemos que la solución implica una senda de consumo estable y constante en el tiempo. Es óptimo para los agentes suavizar completamente el consumo *independientemente de la senda de productividad*. Para mantener el consumo constante, ante choques de productividad, los agentes acuden al mercado financiero internacional y ajustan su stock de activos externos netos.
- La optimalidad de la suavización perfecta del consumo no es un resultado general. Ver ejercicios.

## 4.6. Estado Estacionario

- Por simplicidad supongamos que el capital no se deprecia,  $\delta = 0$ . Adicionalmente supongamos que  $A_t = \underline{A}$  constante. Tenemos que:

$$\begin{aligned} k_t &= \underline{k}, \forall t \\ i_t &= 0 \\ b_t &= 0 \\ CA_t &= 0 \\ TB_t &= rb_0 \\ c &= \underline{A}f(\underline{k}) + rb_0 \end{aligned}$$

- El modelo es consistente con cualquier nivel de activos externos netos iniciales.
- No existe dinámica de transición. La economía se ajusta inmediatamente (en un período, en el caso del stock de capital, e inmediatamente en el caso de variaciones de los activos externos netos) a un nuevo estado estacionario.

## 4.7. Análisis de Impulso Respuesta

- Supongamos que la economía se encuentra en estado estacionario y en el momento  $t = 0$  recibe un choque de productividad inesperado. La respuesta de las variables económicas depende de si el choque es permanente o transitorio.

### 4.7.1. Choque Permanente

- Supongamos que inicialmente  $A_t = \underline{A}$ . En  $t = 0$  la economía recibe el choque sorpresivamente y  $A_t = \bar{A} > \underline{A}$ . Los agentes reoptimizan en  $t = 0$  y la economía se ajusta inmediatamente al nuevo estado estacionario: el capital se ajusta inmediatamente, por la ecuación (10):

$$\begin{aligned} k_0 &= \underline{k} \text{ y } k_t = \bar{k} \text{ para } t = 1, 2, \dots \\ i_0 &= \bar{k} - \underline{k} \text{ y } i_t = 0 \text{ para } t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- Adicionalmente, por un lado tenemos el consumo:

$$\begin{aligned} c &= \frac{r}{1+r} (\bar{A}f(\underline{k}) - i_0) + \frac{r}{1+r} \sum_{t=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}f(\bar{k})}{(1+r)^t} \right) + rb_0 \\ &= \frac{r}{1+r} (\bar{A}f(\underline{k}) - i_0) + \frac{\bar{A}f(\bar{k})}{1+r} + rb_0 \end{aligned}$$

- Por otro el ahorro:

$$\begin{aligned} s_0 &= \bar{A}f(\underline{k}) - \frac{r}{1+r} (\bar{A}f(\underline{k}) - i_0) - \frac{\bar{A}f(\bar{k})}{1+r} \\ &= -\frac{\bar{A}}{1+r} (\bar{k} - \underline{k}) \left( \frac{f(\bar{k}) - f(\underline{k})}{\bar{k} - \underline{k}} \right) + \frac{r}{1+r} (\bar{k} - \underline{k}) \end{aligned}$$

que por la concavidad estricta de la función de producción:

$$\left( \frac{f(\bar{k}) - f(\underline{k})}{\bar{k} - \underline{k}} \right) > f'(\bar{k}) = \frac{r}{\bar{A}}$$

y en consecuencia  $s_0 < 0$ . Para  $t = 1, 2, \dots$  tenemos que  $s_t = 0$ . ¿Por qué?

#### 4.7.2. Choque Transitorio

¿Qué le ocurre a la economía cuando enfrenta un choque transitorio? Verificar su respuesta con las notas de Riascos (2005, [2]), en el modelo de una economía pequeña y abierta.

## 5. Ciclos Económicos en los Mercados Emergentes

- Hasta ahora hemos supuesto que  $A_t = A$  y  $r_t = r$  para todo  $t$  y dichos valores son conocidos por los agentes económicos (previsión perfecta). Ahora introducimos la incertidumbre en el modelo como fuente de las fluctuaciones económicas y relajamos el supuesto de previsión perfecta.

### 5.1. Choques Estocásticos

- Una de las fuentes más importantes de las fluctuaciones económicas en los MEs son los choques a los términos de intercambio y los choques a la tasa de interés externa.
- La variable  $A_t$  se asocia con la productividad total de los factores. La variable  $r_t$  podría pensarse como la tasa de interés real externa que enfrenta la economía.
- Una manera simple de generar ciclos económicos es suponer que  $A_t$  y  $r_t$  siguen un proceso autorregresivo de orden 1:

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= (1 - \rho_A)A + \rho_A A_t + \epsilon_{t+1}^A \\ r_{t+1} &= (1 - \rho_r)r + \rho_r r_t + \epsilon_{t+1}^r \end{aligned}$$

donde  $\epsilon_{t+1}^A$  y  $\epsilon_{t+1}^r$  son una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuída (iid) en el tiempo.

- Estimando estos procesos (o más bien, la desviación con respecto a su tendencia) para Colombia, empleando una muestra desde 1977:1 hasta 2004:4 para el caso de  $A_t$  tenemos que  $\rho_A = 0,39$  y  $\sigma_{\epsilon_A} = 0,029$ . Para el caso de  $r_t$  con una muestra desde 1994:1 hasta 2004:1 tenemos que  $\rho_r = 0,75$  y  $\sigma_{\epsilon_r} = 0,1124$ .

## 5.2. El Modelo Básico con Incertidumbre

- Cuando tenemos en cuenta la incertidumbre, los retornos al capital y a los activos externos netos se vuelven inciertos. A su vez el ingreso de los individuos en consecuencia sus decisiones ya tienen en cuenta dicha incertidumbre.
- El problema de los individuos es:

$$\text{máx } E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} b_{t+1} &= (1 + r_t)b_t + A_t f(k_t) - c_t - i_t \\ k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + i_t \\ A_{t+1} &= (1 - \rho_A)A + \rho_A A_t + \epsilon_{t+1}^A \\ r_{t+1} &= (1 - \rho_r)r + \rho_r r_t + \epsilon_{t+1}^r \\ k_t &\geq 0 \end{aligned}$$

$b_0, k_0$  dados.

- Construyendo el Lagrangiano:

$$L_t = E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t u(c_t) + \Lambda_t^1 [(1 + r_t)b_t + A_t f(k_t) - c_t - i_t - b_{t+1}] + \Lambda_t^2 [(1 - \delta)k_t + i_t - k_{t+1}] \right\} \right]$$

y encontrando las condiciones de primer orden:

$$\lambda_t^1 = \beta E_t [(1 + r_{t+1})\lambda_{t+1}^1] \quad (11)$$

$$\lambda_t^2 = \beta E_t [\lambda_{t+1}^1 A_{t+1} f'(k_{t+1}) + \lambda_{t+1}^2 (1 - \delta)] \quad (12)$$

$$u'(c_t) = \beta \lambda_t^1 \quad (13)$$

$$\lambda_t^1 = \lambda_t^2 \quad (14)$$

$$b_{t+1} = (1 + r)b_t + F(k_t) - c_t - i_t$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

$$t = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\lambda_t \equiv \frac{\Lambda_t}{\beta^t}$ .

- Y las condiciones iniciales y terminales:

$b_0, k_0$  dados

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \lambda_t^1 b_t = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \lambda_t^2 k_t = 0$$

### 5.3. Cerrando Modelos de Economía Pequeña y Abierta

- Ya vimos en el caso determinístico (previsión perfecta) que el modelo no tiene dinámica de transición. Con  $r_t = r$  para todo  $t$ , el stock de capital queda determinado por la ecuación (5) para todo  $t$ .
- Cuando  $r_t$  puede variar aleatoriamente, nótese que las ecuaciones (11)-(14) implican que:

$$E_t \left[ \lambda_{t+1}^1 (1 + r_{t+1}) \right] = E_t \left[ \lambda_{t+1}^1 (1 + A_{t+1} f'(k_{t+1}) - \delta) \right] \text{ para } t = 0, 1, 2, \dots$$

la cual no es trivial de solucionar.

- Sin embargo podemos intuir algunas propiedades de la solución del modelo, gracias a las propiedades del caso determinístico. Nótese que la ecuación anterior sólo tiene variables en  $t + 1$  y se cumple para todo  $t$ . En esencia, cuando se realiza el valor de  $r_t$  en cualquier  $t$  el stock de capital se debe ajustar inmediatamente. Una vez más, el modelo no tiene ni una transición interesante ni una dinámica interesante ante la realización de un choque.
- Hay diversas formas de darle una dinámica más interesante al modelo (“cerrar” el modelo):
  1. Factor de descuento endógeno que depende del nivel de consumo, ver Mendoza (1991).
  2. Costos de ajuste de los activos externos netos
  3. Tasa de interés elástica al nivel de activos externos netos (o de su relación con el producto), ver Hamann y Riascos (1998).
- Los ejercicios propuestos desarrollan estas alternativas. Para más detalles ver Schmitt-Grohe y Uribe (2002).
- Para implementar la tercera alternativa podemos pensar que la tasa de interés que la economía enfrenta al resto del mundo tiene dos componentes: una tasa libre de riesgo  $\bar{r}_t$  y una prima por el riesgo,  $\psi$ , que depende del nivel de endeudamiento agregado de la economía. Entre más deuda tenga la economía más alta es la probabilidad de no repagar la deuda. Redefinimos la tasa de interés externa como:

$$r_t = \bar{r}_t + \psi(b_t) \tag{15}$$

donde ahora la tasa de interés libre de riesgo sigue un proceso AR(1):

$$\bar{r}_{t+1} = (1 - \rho_r)r + \rho_r \bar{r}_t + \epsilon_{t+1}^r$$

donde  $\epsilon_{t+1}^r$  es una variable aleatoria iid.

- En estas circunstancias, tenemos una nueva variable  $r_t$  y una nueva ecuación, la ecuación (15).
- La sensibilidad de la tasa de interés externa ante la deuda es asociada muchas veces con el grado de imperfección de la movilidad de capitales. Cuando dicha elasticidad tiende a cero, los mercados son más perfectos. En el caso contrario, los mercados son imperfectos.

## 5.4. Respuesta del Modelo ante choques

- Ahora evaluamos el impacto de dos tipos de choques: un choque de productividad y un choque a la tasa de interés externa. Cerramos el modelo con una tasa de interés elástica a la deuda externa neta,  $d_t \equiv -b_t$ , el negativo de los activos externos netos.
- Primero, simplificamos el modelo al caso en el que la economía no produce el bien final, sino que dispone de una dotación exógena en el tiempo,  $y_t$ . En este caso, los “choques de productividad” son efectivamente “choques a las dotaciones”.
- Suponemos una función de utilidad CES, una función de prime de riesgo como en Schmitt-Grohe y Uribe (2002, [3]). Los siguientes parámetros (ver código en Mathematica):

Cuadro 2: Parámetros de la Economía Artificial (Dotaciones)

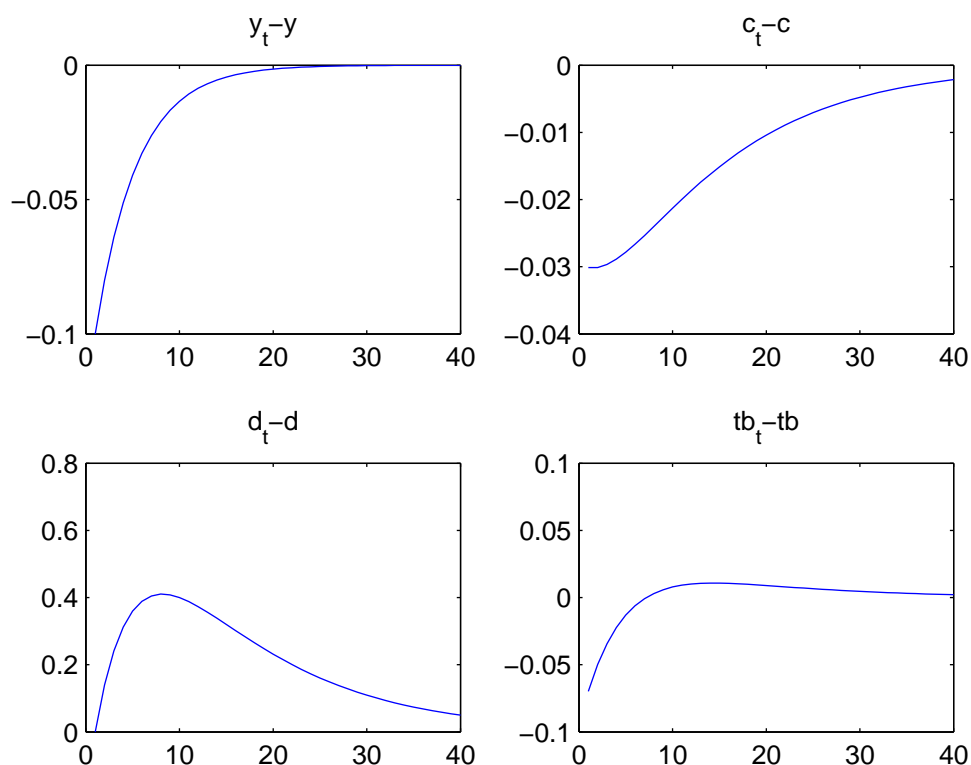
Parámetro	Signo	Valor
Coefficiente de Aversión al Riesgo	$\gamma$	1.5
Tasa de Interés Externa	$r$	0.04
Tasa de Descuento	$\beta$	$\frac{1}{1.04}$
Elasticidad de la tasa a la deuda	$\psi$	0.1
Deuda externa de estado estacionario (% del producto)	$d$	0.5
Autocorrelación del choque al producto	$\rho_y$	0.8
Autocorrelación del choque a la tasa externa	$\rho_r$	0.4

- Después, mostramos la respuesta del modelo ante los mismos choques cuando las firmas emplean capital y trabajo para producir el bien final. Adicionalmente, suponemos que es costoso ajustar el capital.

### 5.4.1. Respuesta ante un choque transitorio pero persistente en el producto

- La figura 2 muestra la respuesta del modelo ante una caída inesperada del producto (que hemos supuesto es exógeno) en un 10 %.

Figura 2: Choque al Producto en una Economía Pequeña y Abierta (Dotaciones)  
(Desviaciones Porcentuales)

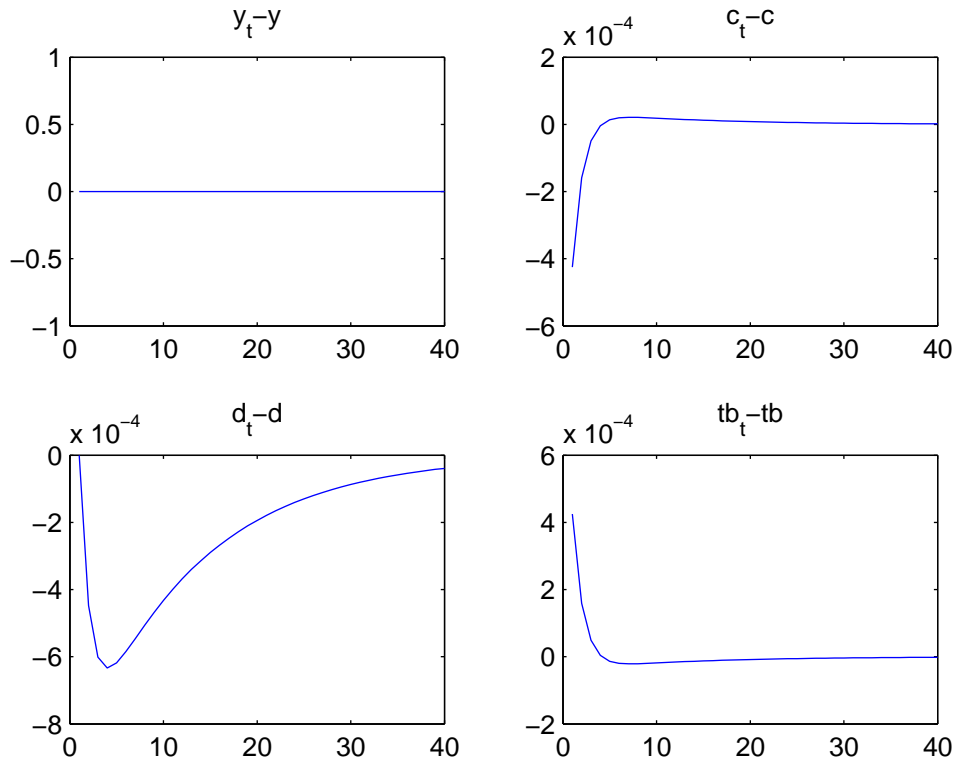


- En esta calibración hipotética, una reducción del 10 % transitoria pero persistente del producto reduce los recursos disponibles para el consumo. Dicha reducción ocurre no sólo en el presente sino en el futuro, porque el choque es persistente. Esto induce una reducción en el consumo corriente (3 % en este caso). Como la reducción en el producto es mayor que el ajuste en el consumo, la balanza comercial se deteriora. Al mismo tiempo, los agentes buscan mitigar la caída en el consumo y se endeudan en el extranjero. La deuda externa aumenta hasta en un 40 % para esta economía artificial.

#### 5.4.2. Respuesta ante un choque transitorio pero persistente de tasa de interés externa

- La figura 3 muestra la respuesta del modelo ante un aumento inesperado de la tasa de interés real externa.

Figura 3: Choque a la Tasa de Interés en una Economía Pequeña y Abierta (Dotaciones)  
(Desviaciones Porcentuales)



- En esta calibración hipotética, un aumento transitorio pero persistente de la tasa de interés externa (no graficado) reduce los recursos disponibles para el consumo porque el país es un tenedor de deuda externa neta (efecto ingreso). Además el aumento en la tasa de interés induce una reducción en el consumo presente relativo al futuro (efecto sustitución intertemporal). Como el aumento de la tasa de interés ocurre no sólo en el presente sino en el futuro, porque el choque es persistente, esto induce una reducción en el consumo (0.4% en este caso). Como el producto es exógeno y se mantiene constante, ante el ajuste en el consumo, la balanza comercial mejora. Al mismo tiempo, la deuda externa se hace más costosa y los agentes buscan reducir su stock de deuda (o aumentar los activos externos netos). La deuda externa cae apenas un 0.6% para esta economía artificial.

### 5.4.3. Calibración para Colombia

- Un modelo más elaborado, calibrado para Colombia, está descrito en Hamann y Riascos (1998, [?]).

## 6. Términos de Intercambio y Otras Distorsiones Intertemporales

- En el modelo básico, suponemos que el precio intertemporal del consumo es constante. En realidad el precio intertemporal del consumo puede variar por muchas razones. Algunas de ellas son: variaciones en los términos de intercambio, imposición o desmonte de aranceles, reformas de liberalización, entre otros.
- Cuando los cambios en el precio intertemporal del consumo son inducidos por cambios de política económica, por ejemplo una liberalización financiera, hablamos de *distorsiones intertemporales*. Estas son distorsiones porque, como vimos en el modelo básico, en ausencia de ellas los agentes en la economía escogen óptimamente una senda plana de consumo. Ver ejercicio 4.
- Un ejemplo es el *efecto Harberger-Laurssen-Metzler* (HLM): cuando los términos de intercambio empeoran (definidos como precio de los importables sobre precio de los exportables). Es ahora ventajoso para los agentes aprovechar los precios más baratos de los productos importados y aumentar el consumo incrementando las importaciones y generando un déficit comercial.

## 7. Ejercicios

1. [*Economía descentralizada*] Supongamos que en la economía hay dos tipos de agentes: individuos y firmas. Los individuos son los dueños de las firmas y de los factores de producción, capital y trabajo, cuyos precios son  $r_t^k$  y  $w_t$ , respectivamente. Las firmas emplean capital y trabajo para producir el bien final. Los beneficios de las firmas son transferidos a los individuos. Los individuos ofrecen trabajo inelásticamente. Las preferencias y la tecnología disponible son idénticas a las de la versión centralizada (en el texto). Plantee este modelo de economía descentralizada. Escriba el problema de las firmas y el problema de los individuos. Defina el equilibrio competitivo. Muestre que las asignaciones del equilibrio competitivo son idénticas a aquellas de la economía centralizada.
2. [*Sostenibilidad de la deuda externa*] En el contexto del ejercicio anterior, muestre que la restricción de recursos (tanto la intertemporal como la de flujos) de la economía descentralizada es la misma. Además, derive la ecuación (9).

3. Verifique para el caso del modelo básico en su versión determinística, que tanto en el caso de un choque transitorio como de uno permanente  $s_t = 0$  para  $t = 1, 2, \dots$
4. [*Distorsiones Intertemporales*] Consideremos un caso extremo en el que existen dos bienes. La economía recibe una dotación de un bien,  $y_t$ , exclusivamente exportable (no importable) y consume otro bien,  $c_t$  exclusivamente importable. Definamos  $p_t$  como el precio relativo (al de exportable, que es el numerario) de una unidad de consumo de importable en el período  $t$ . En este caso la restricción de recursos es:

$$b_{t+1} = (1 + r_t)b_t + y_t - p_t c_t.$$

Nótese que cuando  $p_t = 1$  para todo  $t$ , estamos en el caso del modelo básico cuando la producción es exógena. Escriba el problema del agente representativo y demuestre que, a diferencia del modelo básico, en este caso no es óptimo mantener una senda constante de consumo. Explique la intuición económica detrás de este resultado. Describa la senda del consumo cuando los términos de intercambio  $p_t$  varían el tiempo. ¿Es procíclico o contracíclico el consumo? ¿Y la balanza comercial? Este es llamado efecto *Harberger-Laurson-Metzler*.

5. [*Aranceles*] Consideremos ahora unas condiciones de la economía similares al caso anterior, pero supongamos ahora que hay dos agentes: individuos y gobierno. El gobierno impone un arancel  $\tau_t$  al consumo de bienes importados. El recaudo arancelario es transferido los agentes en una suma fija,  $t_t$  digamos. Por simplicidad, supongamos que el gobierno fija el arancel  $\tau_t = p_t - 1$ . Plantee el balance del gobierno. Plantee el problema del individuo. Derive las restricciones de recursos de la economía (flujos e intertemporal).
6. [*Factor de descuento endógeno: Mendoza, 1991 [1]*] Considere el caso en el que el factor de descuento  $\beta$  es ahora una función que depende del consumo de los agentes,  $c_t$ , con  $\beta_c < 0$ . En particular, la función objetivo es:

$$\text{máx } E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}_t u(c_t)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= 1 \\ \tilde{\beta}_{t+1} &= \beta(c_t) \tilde{\beta}_t \end{aligned}$$

para  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Suponga que la única fuente de incertidumbre es  $A_t$  y la tasa de interés externa es constante,  $r_t = r$  para todo  $t$ .

- a) Determine los efectos sobre el equilibrio del modelo básico en el caso estocástico, comparándolos con el caso en el que  $\beta$  es un parámetro.
- b) ¿Hay alguna diferencia sin el  $\beta$  en lugar de depender del consumo de los agentes, depende del nivel de consumo per cápita?

7. [*Tasa de Interés elástica a la deuda externa*: Uribe y Schmitt-Grohe, 2002 [3]] Considere ahora el caso en el que  $\tilde{\beta}_t = \beta^t$  y  $\beta \in (0, 1)$  y la tasa de interés que la economía enfrenta depende del stock de activos externos netos per cápita, como en la ecuación (15). Al igual que en el ejercicio anterior, suponga que la única fuente de incertidumbre es  $A_t$  y la tasa de interés externa es constante,  $r_t = r$  para todo  $t$ .
- Determine los efectos sobre el equilibrio del modelo básico en el caso estocástico, comparándolos con el caso en el que  $\beta$  es un parámetro.
  - ¿Hay alguna diferencia si la tasa de interés externa en lugar de depender del stock de activos externos netos per cápita, depende del stock de activos externos netos individuales?
8. [*Costos de ajuste de portafolio*: Uribe y Schmitt-Grohe, 2002] De nuevo, suponga que la única fuente de incertidumbre es  $A_t$  y la tasa de interés externa es constante,  $r_t = r$  para todo  $t$ . Ahora los agentes enfrentan un costo cuadrático de cambiar sus tenencias de activos externos netos de un valor predeterminado,  $\bar{b}$  digamos.
- Determine los efectos sobre el equilibrio del modelo básico en el caso estocástico, comparándolos con el caso en el que  $\beta$  es un parámetro.
  - ¿Hay alguna diferencia si los costos de ajuste en lugar de depender del stock de activos externos netos individuales, depende del stock de activos externos netos per cápita?
9. [*Oferta de trabajo elástica*] Considere el modelo básico en el caso estocástico y suponga que la oferta de trabajo es elástica. Derive las condiciones de primer orden de los agentes.

## Referencias

- [1] Enrique G. Mendoza. Real business cycles in a small open economy. *American Economic Review*, 81(4):797–818, September 1991.
- [2] Alvaro Riascos. *Macroeconomía avanzada con aplicaciones a Colombia*. Banco de la República, 2005.
- [3] Stephanie Schmitt-Grohe and Martin Uribe. Closing small open economy models. Working paper 9270, National Bureau of Economic Research, 2002.