Un método para discernir entre los paradigmas de valor común y valor privado en subastas uniproducto

Diana Gómez, Andrés Carvajal, Alvaro Riascos, Diego Vásquez.
Banco de la República

August 12, 2003

1 Introducción:

Durante las últimas décadas, el mecanismo de subastas ha ganado enorme popularidad como herramienta de asignación de recursos y preponderancia como agenda de investigación académica. En particular, considerando las diferentes alternativas de diseño de una subasta, se han estudiado sus propiedades de optimalidad, tanto del punto de vista de eficiencia social[1] como del de rentabilidad (optimalidad privada).[2] Por supuesto, existen factores relativamente objetivos que pueden afectar estos aspectos de optimalidad, tales como la arquitectura misma de la subasta, o el poder de mercado de los compradores. Adicionalmente, hay un factor subjetivo que es crucial al momento de estudiar el problema y que es intrínseco al bien subastado: la forma en que los agentes valoran dicho objeto.

Según este último aspecto, las subastas se encuentran divididas en dos grandes grupos: i) las de valor privado y ii) las de valor común. Las subastas de valor privado son aquellas donde los jugadores conocen su propia valoración del objeto a ser subastado, y les es indiferente conocer las valoraciónes de los demás jugadores: si un jugador se entera de la verdadera valoración de otro, esto no conduce a un cambio en la suya. Como ejemplo se tiene una subasta de una obra de arte para uso personal, donde cada individuo valora la obra según sus propias preferencias y a partir de éstas procede a realizar su oferta. Las subastas de valor común se caracterizan por ser aquellas donde el valor del objeto es el mismo para todos, pero los individuos desconocen este valor y, por consiguiente, se basan en señales recibidas para hacer estimaciones de él. Al igual que en las de valor privado, se carece de información acerca de la señal

[1] Una subasta es socialmente eficiente cuando el ganador de ella es el jugador con la mayor valoración sobre el bien subastado; o el menor costo cuando los jugadores compiten para realizar, por ejemplo, una obra de ingeniería.

[2] Una subasta es óptima o eficiente de forma privada cuando ésta maximiza los ingresos esperados del subastador.

de los demás jugadores, pero si algún jugador se entera de la señal de otro, ésta información le resulta de gran utilidad en el momento de decidir cuál es el valor del bien. Como ejemplos se tienen: i) una licitación para la explotación de un yacimiento petrolífero, donde la explotación tiene el mismo costo para todos, pero éste es desconocido y, por tanto, los jugadores hacen sus ofertas de acuerdo a las señales que reciben sobre los verdaderos costos y ii) una subasta de títulos del tesoro donde los jugadores revenden inmediatamente los títulos a otros inversionistas que no participan en las subastas.[3]

Cuando uno observa los resultados de una subasta, puede que no sea inmediatamente obvio cuál de los dos paradigmas es el que puede estar explicando el comportamiento de los agentes. Una primera alternativa para discernir entre los paradigmas es, por supuesto, la utilización de consideraciones teóricas acerca de las características mismas del objeto subastado o de los mercados en los que éste puede transarse. En este trabajo, proponemos una alternativa empírica en la que tal discernimiento se realiza con base en los datos observados.

El problema es relevante por, por lo menos, por dos razones. La primera es que el definir cuál paradigma es más adecuado para modelar una subasta no siempre es evidente (por ejemplo en las subastas de liquidez de los bancos centrales o en licitaciones de proyectos públicos.[4]) La segunda es que los problemas que son relevantes en una subasta dependen del paradigma que aplique: en las subastas de valor común, dado que el bien tiene el mismo valor para todos los individuos, el problema de ineficiencia social simplemente no existe.

Bajo supuestos acerca de las distribuciones aleatorias que pueden explicar las valoraciones en el paradigma de valores privados o las señales recibidas por los oferentes en el de comunes, cada uno de estos paradigmas se identifica con una familia de distribuciones de probabilidad sobre las variables observables (las ofertas de cada agente o las ofertas ganadoras). Estas familias están parametrizadas por los coeficientes de las distribuciones, los cuales son no observables. Si dada una serie de datos observados las distribuciones de cada familia que mejor explican los datos observados tuvieran un ajuste estadístico similar, habríamos de concluir que los datos observados no permiten discernir entre los paradigmas. En este trabajo proponemos una metodología estadística que combina en una sola distribución elementos de las dos familias y realiza inferencia estadística para intentar discernir entre los paradigmas. Sin aplicación a datos reales, sino por medio de simulaciones, estudiamos la potencia del método propuesto, evaluando la frecuencia con que éste llevaría a una conclusión errónea.

La conclusión que obtenemos es que nuestro método exhibe una potencia aceptable, pero este resultado debe tomarse con cautela en el sentido de que él se obtuvo para distribuciones particulares y valores paramétricos específicos. Una aplicación del método propuesto a un caso diferente al aquí considerado debería

[3] En general se considera que existen dos propósitos por los cuales los individuos participan en una subasta: i) con el fin de adquirir un bien para uso personal y ii) para negociar el bien con inversionistas que no participan en la subasta. El primer propósito se identifica con el paradigma de valor privado, mientras que el segundo lo hace con el de valor común.

[4] El caso de licitaciones de reforestación de bosques en Canadá es estudiado por Paarsch (1992), utilizando herramientas empíricas diferentes a la aquí propuesta.

precederse de una evaluación de la potencia del método en el caso específico, ojalá utilizando más replicaciones y más diversos valores paramétricos que los que aquí considerados.

Debe también anotarse que el método que proponemos ha aparecido tangencialmente en la literatura estadística, como un método general de discernir entre posibles procesos generadores de datos. En efecto, el método que nosotros proponemos tendría utilidad en problemas más generales, aun completamente independientes del problema de subastas. El valor agregago de este documento es que, hasta donde nosotros conocemos, esta idea no ha sido aplicada a problemas concretos ni su potencia ha sido examinada.

2 Paradigmas en modelos de subastas uniproducto:

Consideremos una subasta a sobre cerrado de primer precio con n jugadores que participan para realizar la reforestación de un bosque, lo cual implica que el ganador de dicha subasta es el licitante que esté dispuesto a realizar la obra por el menor precio en comparación con los demás licitantes de la subasta. Se supone que los jugadores son neutrales al riesgo, simétricos y tienen algun tipo de información acerca de los costos asociados a la realización de la obra. Además, harán sus pujas de acuerdo a su propia información con el propósito de maximizar su utilidad esperada, dadas las ofertas de los demás.

El concepto que utilizamos para definir las ofertas de equilibrio resultante de la subasta (que induce un juego simultáneo con asimetría de información), es el de equilibrio de Bayes-Nash simétrico: todos los individuos siguen la misma estrategia y ésta es tal que, para cada individuo, dado que los demás jugadores está siguiendo esta estrategia, su mejor respuesta en términos de utilidad esperada es en efecto la estrategia común.

2.1 El paradigma de valor común:

El modelo empírico de subastas de valor común parte del supuesto de que todos los jugadores tienen el mismo costo, C, de realizar la obra, el cual es desconocido por todos. Por tanto, sus estrategias de equilibrio se basan en estimaciones de los costos, X, con una distribución conocida por todos los individuos que participan en la subasta.

Sea $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ la función de densidad de probabilidad condicional de X. Suponemos que se X distribuye Weibull:

$$f\left(x \mid c\right) = a\gamma_2 x^{\gamma_2 - 1} \exp\left(-a x^{\gamma_2}\right)$$

donde a y γ_2 son parámetros mayores que cero.y donde[5]

$$a = \left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma_2}\right)}{c} \right]^{\gamma_2}$$

lo cual garantiza que que $E[X] = c$ (ver apéndice 7.1).

La distribución de probabilidad condicional de X, $F : \mathbb{R}_{++} \to [0,1]$, es entonces:

$$F(x|\, c) = 1 - \exp\left(-ax^{\gamma_2}\right)$$

Nótese que F es monótona creciente y su función inversa es:

$$F^{-1}(y|\, c) = \left[\frac{\ln\left(1-y\right)}{-a} \right]^{1/\gamma_2}$$

Los jugadores deben hacer una oferta que maximice sus ganancias esperadas. Para simplificar, Rothkopf (1969) y Smiley (1979) proponen que éstas sean multiplicativas, y por tanto las definen como:

$$B_C(x) = \rho x$$

donde ρ es mayor que uno y constituye el *Mark-Up Multiplier.*

Cuando las señales de los costos de cada jugador provienen de una distribución Weibull, Rothkopf (1969) demuestra que la función de ofertas se encuentra dada por:

$$B_C(x) = \left[\frac{\gamma_2(n-1)n^{1/\gamma_2}}{\gamma_2(n-1)-1} \right] x$$

bajo el supuesto de que $\gamma_2 > 1/(n-1)$.

A partir de las ofertas de equilibrio, $B_C(X)$, se obtiene la oferta ganadora, $W = \rho \min\{X_1, ...X_n\}$, la cual es obviamente una variable aleatoria. Su función de densidad , $h_C : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$, está dada por (ver apéndice 7.2):

$$h_C(w) = \gamma_1 \gamma_2 w^{\gamma_2 - 1} \exp(-\gamma_1 w^{\gamma_2})$$

donde $\gamma_1 = a \left[\frac{\gamma_2(n-1)-1}{\gamma_2(n-1)} \right]^{\gamma_2}$, y su distribución $H_C : \mathbb{R}_{++} \to [0,1]$ por:

$$H_C(w) = 1 - \exp\left(-\gamma_1 w^{\gamma_2}\right)$$

[5] Γ es la función gamma definida por $\Gamma(t) = \int_0^\infty u^{t-1} \exp(-u) du$

2.2 El paradigma de valor privado:

El modelo empírico de subastas de valor privado parte del supuesto de que cada jugador conoce su costo, C, sobre el bien a ser subastado, el cual es independiente del de los demás participantes pero proviene de una única distribución, la cual se supone conocida por todos. De esta manera, las estrategias de equilibrio de cada uno de los participantes de la subasta dependen, únicamente, de dicho costo.

Sea C una variable aleatoria que se distribuye Pareto, de forma su función de densidad , $g : [\theta_1, \infty) \to \mathbb{R}$, está dada por:

$$g(c) = \frac{\theta_2 \theta_1^{\theta_2}}{c^{\theta_2+1}}$$

donde $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$ son los parámetros, y $c \geq \theta_1$. La distribución de Pareto es adecuada para que las estrategias de equilibrio tengan la característica de ser multiplicativas tal como las de subastas de valor común.

La distribución de C, $G : [\theta_1, \infty) \to [0, 1]$, es:

$$G(c) = 1 - \left(\frac{\theta_1}{c}\right)^{\theta_2}$$

la cual es monótona creciente y tiene la siguiente función inversa:

$$G^{-1}(y) = \theta_1 (1-y)^{-1/\theta_2}$$

Las estrategias de equilibrio de los jugadores están dadas por (ver apéndice 7.3):

$$B_P(c) = c + \frac{\int_c^\infty (1 - G(\varepsilon))^{n-1} d\varepsilon}{(1 - G(c))^{n-1}}$$

Remplazando, se obtiene que

$$\begin{aligned}
B_P(c) &= c + \frac{\int_c^\infty \left(\frac{\theta_1}{\varepsilon}\right)^{\theta_2(n-1)} d\varepsilon}{\left(\frac{\theta_1}{c}\right)^{\theta_2(n-1)}} \\
&= c + \frac{\frac{\theta_1^{\theta_2(n-1)}}{1-\theta_2(n-1)} \left[\varepsilon^{1-\theta_2(n-1)}\right]_c^\infty}{\frac{\theta_1^{\theta_2(n-1)}}{c^{\theta_2(n-1)}}} \\
&= c + \frac{c^{\theta_2(n-1)}}{1-\theta_2(n-1)} \left[-c^{1-\theta_2(n-1)}\right] \\
&= c - \frac{c}{1-\theta_2(n-1)} \\
&= c \left[\frac{\theta_2(n-1)}{\theta_2(n-1)-1}\right]
\end{aligned}$$

donde se supone que $\theta_2 > 1/(n-1)$. La oferta ganadora W, es la oferta mínima entre todas las ofertas $B_P(C)$, es decir, $W = \min\{B_P(C_1), ..., B_P(C_n)\}$, una variable aleatoria con densidad, $h_P : \left(\frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{\theta_2(n-1)-1}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, (ver apéndice 7.4):

$$h_P(w) = \frac{\theta_2 n \left(\frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{\theta_2(n-1)-1}\right)^{\theta_2 n}}{w^{\theta_2 n+1}}$$

y distribución, $H_P : \left(\frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{\theta_2(n-1)-1}, \infty\right) \to [0,1]$, dada por:

$$H_P(w) = 1 - \left[\frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{(\theta_2(n-1)-1)w}\right]^{\theta_2 n}$$

3 Un método para discernir entre paradigmas:

Suponga que se ha realizado una serie de $s \in \mathbb{N}$ subastas (licitaciones) como las consideradas en la sección anterior, en todas las cuales ha participado el mismo grupo de agentes, y que se conoce la serie observada de ofertas ganadoras. Como observadores externos, nos es imposible saber las consideraciones qué llevaron a los oferentes a tener el comportamiento observado, en particular si sus valoraciones de los contratos subastados se ajustaron al paradigma de valores comunes o al de privados. Sin embargo, supongamos que sabemos que si el paradigma fue el de comunes, las señales provinieron de una distribución Weibull, cuyos parámetro, por supuesto, desconocemos, mientras que si el paradigma fue el de valores privados, sabemos que las valoraciones provinieron de una distribución Pareto, también de parámetros desconocidos.

Nuestro problema estadístico es el de distinguir entre las dos familias de procesos generadores de datos (PGD). Ahora condicional en nuestros anteriores supuestos, lo que sí sabemos es que los datos son una seré de realizaciones generada por una función de densidad $h : \left(\frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{\theta_2(n-1)-1}, \infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h\left(w|\,\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta\right) = \beta\left[h_C\left(w|\gamma_2, c\right)\right] + (1-\beta)\, h_P\left(w|\theta_1, \theta_2\right)$$

donde $\beta \in [0,1]$, y donde γ_2, c, θ_1, θ_2 y β son parámetros desconocidos.

En efecto, suponga que esta combinación convexa de las dos funciones de densidad, para ciertos valores de los parámetros, es necesariamente el PGD de la serie observada, dados nuestros supuestos anteriores. Nuestra propuesta metodológica es la siguiente: utilizando este conocimiento, derivamos la función de verosimiltud $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$LL\left(\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta|\,\{w_i\}_{i=1}^{s}\right) = \prod\nolimits_{i=1}^{s} L\left(\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta|\, w_i\right)$$

donde, numéricamente, para todo i,

$$L\left(\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta|\, w_i\right) = h\left(w_1|\,\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta\right)$$

Luego, para discernir entre paradigmas se estiman los cinco parámetros $\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta$, por medio de la maximización de LL sujeta a las restricciones impuestas por la teoría y a que $\beta \in [0, 1]$, y luego se hace inferencia sobre el siguiente par de hipótesis nulas:

- $H_0 : \beta = 1$, contra $H_1 : \beta < 1$. En caso de no rechazarse la hipotesis nula, se concluye que hay una distribución bajo el paradigma de valores comunes que explica los datos observados.
- $H_0 : \beta = 0$, contra $H_1 : \beta > 0$. En caso de no rechazarse la hipotesis nula, se concluye que hay una distribución bajo el paradigma de valores privados que explica los datos observados.

El caso ideal de discernimiento es aquel en el cual la evidencia lleva al rechazo de la hipótesis nula en uno de los casos y al no rechazo de ella en el otro caso. A continuación realizamos una serie de ejercicios de simulación para medir la potencia del método propuesto, en el sentido de evaluar con que frecuencia, en una serie de replicaciones, el método conduce a conclusiones erróneas.

4 Una evaluación de la potencia del método propuesto:

Simulamos un conjunto de series de ofertas ganadores, para cada uno de los paradigmas y para diferentes valores de s y n, cada una de las cuales es utilizada, por separado, para la aplicación del método propuesto. Luego contrastamos las conclusiones de las pruebas de inferencia estadística con la 'realidad' del paradigma utilizado en la simulación y contamos con qué frecuencia la conclusión fue inconsistente con la realidad.

4.1 Generación de datos de subastas:

Con el propósito de seguir todo el procedimiento de las subastas, partimos con una simulación de las señales, X, y los costos, C, para subastas de valor común y privado, respectivamente. Como X y C son variables aleatorias con distribuciónes monótonas, es posible hallar realizaciones de ellas por medio de la generación de valores de una variable aleatoria Y, distribuída uniforme entre $[0, 1]$, y luego utilizando las inversas de las distribuciones, de manera tal que en el caso correspodiente, $x = F^{-1}(y|c)$ ó $c = G^{-1}(y)$ (ver apéndice 7.5 para una explicación).

4.1.1 Paradigma de valor común:

Construimos una matriz $\mathbf{X}$, de $s \times n$, con simulaciones de las señales recibidas sobre los costos, X, por los n jugadores en las s subastas. A partir de la matriz $\mathbf{X}$, con el valor de ρ, construímos la matriz $\mathbf{B}_C$, del mismo tamaño que X, la cual constituye las ofertas de equilibrio de cada uno de los oferentes en las diferentes subastas. Con los mínimos de $\mathbf{B}_C$ por filas, deducimos el vector de ofertas ganadoras $\mathbf{W}_C$, de dimensión s.

4.1.2 Paradigma de valor privado:

Construimos una matriz $\mathbf{C}$, de $s \times n$, la cual se encuentra compuesta por las observaciones generadas de los costos, C, para realizar la obra de los n oferentes en las s subastas. Por medio de la estrategia de equilibrio, utilizamos $\mathbf{C}$ para encontrar la matriz $\mathbf{B}_P$, del mismo tamaño, la cual constituye las ofertas de de los n oferentes en las s subastas. Con los mínimos de $\mathbf{B}_P$ por filas, deducimos el vector de ofertas ganadoras $\mathbf{W}_C$, de dimensión s.

4.2 Estimación conjunta:

La función de verosimilitud se como la combinación convexa. En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
& \ell\left(\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta \middle| \left\{w_i\right\}_{i=1}^{s}\right) \\
= \; & \log\left(LL\left(\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta \middle| \left\{w_i\right\}_{i=1}^{s}\right)\right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{s} \left\{ \log\left[\beta\left(\gamma_1 \gamma_2 w_i^{\gamma_2 - 1} \exp\left(-\gamma_1 w_i^{\gamma_2}\right)\right) + (1-\beta)\left(\frac{\theta_2 n \left(\frac{\theta_1 \theta_2 (n-1)}{\theta_2 (n-1) - 1}\right)^{\theta_2 n}}{w_i^{\theta_2 n + 1}}\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

La estimación por máxima verosimilitud es entonces la solución del problema

$$\max_{\theta_1, \theta_2, \gamma_2, c, \beta} \ell\left(\gamma_2, c, \theta_1, \theta_2, \beta \middle| \left\{w_i\right\}_{i=1}^{s}\right) \text{ s.a. } \left\{ \begin{array}{c} c \geq \theta_1 \\ \frac{\theta_1 \theta_2 (n-1)}{\theta_2 (n-1) - 1} \leqslant w_i, \, \forall i \\ \gamma_2 > 1/(n-1) \\ \theta_1 > 0 \\ \theta_2 > 1/(n-1) > 0 \\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \end{array} \right.$$

Realizamos el ejercicio de estimación con observaciones generadas para subastas de valor privado por separado de las de valor común.

4.3 Inferencia:

Obtenidos los cinco parámetros estimados, $\widehat{\gamma}_2, \widehat{c}, \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2$ y $\widehat{\beta}$, hacemos las pruebas de hipótesis propuestas. Para esto, es necesario hallar las distribuciones de $\widehat{\beta}$ bajo cada una de las hipótesis nulas, lo cual se hace utilizando simulaciones de Montecarlo (ver apéndice 7.6 para detalles).Las pruebas se hicieron al 95% de confiabilidad.

De cada una de las pruebas de hipótesis surgen cuatro posibles respuestas de acuerdo a dos situaciones: i) si se generan los datos con el paradigma de comunes o el de privadas y se está aplicando la prueba correspondiente ii) si se generan con el paradigma de comunes o el de privadas y se aplicando la prueba contraria.

La primera situación genera los siguientes resultados: i) si no se rechaza H_0 entonces la respuesta es correcta (A1), es decir, la conclusión de la prueba es consistente con el tipo de subasta de la cual provienen los datos y ii) si se rechaza H_0 la respuesta es incorrecta y incurre en un error tipo 1 (E1): la prueba rechaza el verdadero paradigma de los datos. La segunda situación genera los siguientes resultados: i) si se rechaza H_0 la respuesta es correcta (A2), es decir, el resultado de la prueba dice que los datos son inconsistentes con el paradigma que, en efecto, no los generó y ii) si no se rechaza H_0 entonces se tiene un error tipo 2 (E2), es decir, la prueba comete un error al decir que los datos provienen del paradigma equivocado.

4.4 Potencia:

Se calculó la potencia de la prueba de la siguiente manera:

$$\frac{\sum_{s'=1}^{S} Q_{s'}}{S}$$

donde Q puede ser $A1$, $A2$, $E1$ ó $E2$, y $S = 100$.

4.5 Resultados:

4.5.1 Cuando el verdadero paradigma es el de valor común:

La tabla 1 muestra la potencia del método propuesto, cuando el verdadero paradigma es el de valor común, para diferentes valores del número de compradores, n, y de subastas observdadas, s:

Tabla 1

Potencia del método propuesto, cuando el verdadero paradigma es el de Valor Común							
Porcentaje de A1				Porcentaje de A2			
s	n=10	n=50	n=100	s	n=10	n=50	n=100
20	0.52	0.62	0.64	20	0.8	0.82	0.86
100	0.6	0.66	0.78	100	0.94	0.96	0.98
500	0.8	0.84	0.87	500	0.97	0.99	0.99
1000	0.84	0.88	0.92	1000	0.98	1	1
Porcentaje de E1				Porcentaje de E2			
s	n=10	n=50	n=100	s	n=10	n=50	n=100
20	0.48	0.38	0.36	20	0.2	0.18	0.14
100	0.4	0.34	0.22	100	0.06	0.04	0.02
500	0.2	0.16	0.13	500	0.03	0.01	0.01
1000	0.16	0.12	0.08	1000	0.02	0	0

Los resultados muestran que el método propuesto tiene alta potencia para muestras grandes, en particular si el número de compradores, que no se traduce en un diferente tamaño muestral, es alto. En efecto, cuándo sólo se observan

20 subastas (su puja ganadora) en las que han participado 10 compradores, en un 48% de las veces se rechazó la hipótesis nula de que los datos provenían de valores comunes ($E1$), en tanto que el error tipo 2 fué más bajo: sólo en el 20% de los casos no se rechazó la hipótesis nula de que los datos provenían de subastas de valores privados. Cuando se tiene el mismo tamaño muestral, pero el número de compradores ha sido más alto, en particular 100, el porcentaje de veces que se encontró error tipo 1 cae a 36%, en tanto que el de error tipo 2 cae a 14%. Como era de esperar, el tamaño muestral tiene un efecto importante en la potencia de la prueba: aún si sólo 10 compradores han participado en las subastas pero se tiene un tamaño muestral de 1000, en el 84% de los casos no se rechaza la hipótesis nula cierta de que los datos vienen de vaores comunes, en tanto que en la totalidad de las cien replicaciones no se rechazó la hipótesis nula, falsa, de que los datos vienen del paradima de valores privados.

4.5.2 Cuando el verdadero paradigma es el de valor común:

Cuando los datos han sido generados bajo el paradigma de valores privados, la potencia de la prueba muestra un comportamiento similar, con la salvedad de que el método aparece menos potente cuando la muestra y el número de compradores son pequeños, al menos desde el punto de vista del error tipo 1. La tabla 2 muestra nuestros resultados:

Tabla 2

Potencia del método propuesto, cuando el verdadero paradigma es el de Valor Privado

Porcentaje de A1				Porcentaje de A2			
s	n=10	n=50	n=100	s	n=10	n=50	n=100
20	0.38	0.48	0.6	20	0.78	0.86	0.88
100	0.54	0.6	0.72	100	0.88	0.86	0.88
500	0.74	0.86	0.92	500	0.9	0.94	0.94
1000	0.88	0.91	0.96	1000	0.97	0.99	1
Porcentaje de E1				Porcentaje de E2			
s	n=10	n=50	n=100	s	n=10	n=50	n=100
20	0.62	0.52	0.4	20	0.22	0.14	0.12
100	0.46	0.4	0.28	100	0.12	0.14	0.12
500	0.26	0.14	0.08	500	0.1	0.06	0.06
1000	0.12	0.09	0.04	1000	0.03	0.01	0

Cuándo se observan 20 subastas con 10 compradores, en un 62% de las veces se rechazó la hipótesis nula, cierta, de que los datos provenían de valores privados, en tanto que el error tipo 2, de no rechazar la hipótesis nula falsa, fué más bajo y similar en niveles al del caso anterior: en el 22% de los casos se observó error tipo 2. Con el mismo tamaño muestral, aumentar el número de compradores tiene el mismo efecto que en el caso anterior y cuando éste llega a 100, la potencia de la prueba alcanza un nivel similar al del caso anterior: respectivamente, hay errores tipo 1 y 2 en el 40 y 12% de las replicaciones. El efecto que es más significativo, y más en este paradigma que en el anterior, es la mejora de la prueba a medida que crece el tamaño muestral: con sólo 10 compradores pero 1000 subastas observadas, se observo acierto tipo 1 en el 88%

de las replicaciones y acierto tipo 2 en el 97% de ellas; este efecto es más significativo que en el paradigma anterior, pues pasar de 20 a 1000 observaciones aumentó el porcentaje de aciertos tipo 1 en 50 puntos en este paradigma, mientras que sólo lo hizo en 32 puntos en el paradigma de valores comunes. Si tanto el número de compradores como el de observaciones son altos, la potencia de la prueba se acerca a 1.

5 Conclusiones:

Se ha propuesto aquí un método estadístico para discernir entre dos posibles (familias de) PGDs, dada una muestra finita que, por supuesto, debe haber venido de uno de ellos. El proceso consiste en combinar convexamente las dos funciones de densidad y estimar por máxima verosimilitud todos los parámetros resultantes, incluído el combinador convexo, y en luego hacer inferencia estadística sobre el valor de este: dependiendo de la conclusión que arroje la inferencia, si el combinador significativamente cae en uno de sus extremos, se concluye qué PGD es más ajustado a los datos.

El objetivo de este trabajo fue medir, mediante simulación, qué tan potente es este método, cuando aplicado al caso de observaciones de la puja ganadora en una licitación uniproducto, a partir de las cuales se pretende discernir si el paradigma que aplica es el de valores comunes o el de privados. Bajo supuestos distributivos que implican que las estrategias de equilibrio de los compradores son multiplicativas, se encontró que la potencia del método es alta cuando el tamaño de la muestra de observaciones en grande. También se encontró que una mayor número de participantes en la subasta, lo cual no se traduce en un mayor tamaño muestral, sí implica que la serie observada contenga mayor información, pues para un tamaño muestral dado este hecho incrementa la potencia de la prueba.

El método es más general que lo que aquí se ha aplicado, pues, de hecho, sirve en problemas generales más allá del de subastas. Los resultados aquí obtenidos, sin embargo, deben tomarse con cautela, pues pueden ser sensibles a los PGDs entre los cuales se pretende discernir. En el caso específo que aquí consideramos, el desempeño del método es satisfactorio.

6 Referencias:

[1] COX, David R. Further Results on Tests of Separate Families of Hypotheses. Journal of the Royal Statistical Society. 1962. Vol 24. Pág 406-424.

[2] HAMILTON, James D. Time Series Analysis. Princeton University Press, 1994.

[3] PAARSCH, Harry J. Deciding between the common and private value paradigms in empirical models of auctions. Journal of Econometrics. 1992. Vol 51. Pág 191-215.

[5] ROTHKOPF, Michael H. A Model of Rational Competitive Bidding. Management Science. 1969. Vol 15. Pág 362-373.

[6] SMILEY, Albert. Competitive bidding under uncertainty: The case of offshore oil. Ballinger Publishing Company, 1979.

7 Apéndices:

7.1 Insesgamiento de X:

Para que X sea insesgada se requiere que $E(x|c) = c$. Dado que X es una variable aleatoria continua en el intervalo $(0, \infty)$, entonces se cumple que:

$$E(x|c) = \int_0^\infty x f(x|c) dx$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} E(x|c) &= \int_0^\infty x a \gamma_2 x^{\gamma_2 - 1} \exp\left(-a x^{\gamma_2}\right) dx \\ &= \frac{\int_0^\infty x a^{1/\gamma_2} \left[a \gamma_2 x^{\gamma_2 - 1} \exp\left(-a x^{\gamma_2}\right)\right] dx}{a^{1/\gamma_2}} \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $u = a x^{\gamma_2}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} E(x|c) &= \frac{\int_0^\infty u^{1/\gamma_2} \exp\left(-u\right) du}{a^{1/\gamma_2}} \\ &= \frac{\Gamma(1 + 1/\gamma_2)}{a^{1/\gamma_2}} \end{aligned}$$

Como además se tiene que $E(x|c) = c$, entonces,

$$c = \frac{\Gamma(1 + 1/\gamma_2)}{a^{1/\gamma_2}}$$

y, por tanto,

$$a = \left[\frac{\Gamma(1 + 1/\gamma_2)}{c}\right]^{\gamma_2}$$

7.2 Densidad de las ofertas ganadoras bajo valor común:

F es la distribución de probabilidad de X:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x a \gamma_2 u^{\gamma_2 - 1} \exp(-a u^{\gamma_2}) du \\ &= 1 - \exp(-a x^{\gamma_2}) \end{aligned}$$

Sea $\tilde{F}$ la distribución de probabilidad de las ofertas de equilibrio $B_C(X)$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(b) &= \Pr\left(B_C(x) \leq b\right) \\
&= \Pr\left(\left(\frac{\gamma_2(n-1)n^{1/\gamma_2}}{\gamma_2(n-1)-1}\right) X \leq b\right) \\
&= \Pr\left(X \leq \left(\frac{\gamma_2(n-1)-1}{\gamma_2(n-1)n^{1/\gamma_2}}\right) b\right) \\
&= F\left[\left(\frac{\gamma_2(n-1)-1}{\gamma_2(n-1)n^{1/\gamma_2}}\right) b\right] \\
&= 1-\exp\left\{-a\left[\left(\frac{\gamma_2(n-1)-1}{\gamma_2(n-1)n^{1/\gamma_2}}\right) b\right]^{\gamma_2}\right\}
\end{aligned}
$$

Sea H_C la distribución de probabilidad de las ofertas ganadoras $W = B_C(X)_{(1:n)}$,

$$
\begin{aligned}
H_C(w) &= \Pr\left(W \leq w\right) \\
&= 1-\Pr\left(W > w\right) \\
&= 1-\Pr\left(\forall i, \quad B_C(X_i) > w\right) \\
&= 1-\left[1-\tilde{F}(w)\right]^n \\
&= 1-\left\{\exp\left[-a\left(\frac{\gamma_2(n-1)-1}{\gamma_2(n-1)n^{1/\gamma_2}}\right)^{\gamma_2} w^{\gamma_2}\right]\right\}^n \\
&= 1-\exp\left(-\gamma_1 w^{\gamma_2}\right)
\end{aligned}
$$

donde $\gamma_1 = a\left(\frac{\gamma_2(n-1)-1}{\gamma_2(n-1)}\right)^{\gamma_2}$. Derivando la distribución de probabilidad, se obtiene la función de densidad de W,

$$
h_C(w) = \gamma_1\gamma_2 w^{\gamma_2-1}\exp(-\gamma_1 w^{\gamma_2})
$$

7.3 Función de oferta en subastas de valor privado.

Fíjese un licitante i, y supongamos que cada agente $j \neq i$ sigue una estrategia B_j. Sea C una variable aleatoria. Dado que C se distribuye G, el problema del agente i es encontrar B tal que:

$$
B\left(c\right) = \arg\max_b E(\pi(b,c))
$$

donde π es el beneficio, b es la puja ofrecida, y c son los costos asociados a la obra.

Por definición, $E(\pi(b,c)) = (b-c)\,\gamma(b)$, donde $\gamma(b)$ es la probabilidad de ganar:

$$
\gamma(b) = \Pr\left(\{\forall j \neq i,\ B_j(C_j) \geq b\}\right)
$$

Por independencia se tiene que

$$\gamma(b) = \prod_{j \neq i} \left(\Pr\left(B_j(C_j) \geq b\right)\right)$$

luego, asumiendo que B_j es monótona creciente,

$$\gamma(b) = \prod_{j \neq i} \left(\Pr\left(C \geq B_j^{-1}(b)\right)\right)$$

Si suponemos que todos los individuos diferentes de i juegan la misma estrategia óptima B_P, entonces:

$$\gamma(b) = \left[1 - G\left(B_P^{-1}(b)\right)\right]^{n-1}$$

De donde

$$\begin{aligned} E(\pi(b,c)) &= (b-c)\gamma(b) \\ &= (b-c)\left[1 - G\left(B_P^{-1}(b)\right)\right]^{n-1} \end{aligned}$$

Para mayor facilidad, digamos que $\left[1 - G\left(B_P^{-1}(b)\right)\right]^{n-1} = h(b)$. El problema se reduce a

$$\max_b (b-c)h(b)$$

La condición de primer orden, bajo el supuesto de equilibrio simétrico es:

$$\left(B_P(c) - c\right) h'\left(B_P(c)\right) + h\left(B_P(c)\right) = 0$$

Multiplicando por $B_P'(c)$, y restando $h\left(B_P(c)\right)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(B_P(c) - c\right) h'\left(B_P(c)\right) B_P'(c) + h\left(B_P(c)\right) B_P'(c) - h\left(B_P(c)\right) &= -h\left(B_P(c)\right) \\ \left(B_P(c) - c\right) h'\left(B_P(c)\right) B_P'(c) + h\left(B_P(c)\right)\left(B_P'(c) - 1\right) &= -h\left(B_P(c)\right) \\ \frac{d}{dc}\left[\left(B_P(c) - c\right) h\left(B_P(c)\right)\right]_{c=\varepsilon} &= -\left(1 - G(\varepsilon)\right)^{n-1} \\ \left[\left(B_P(\varepsilon) - \varepsilon\right)\left(1 - G(\varepsilon)\right)^{n-1}\right]_c^{\infty} &= -\int_c^{\infty} \left(1 - G(\varepsilon)\right)^{n-1} d\varepsilon \end{aligned}$$

Suponiendo que $\lim_{c \to \infty} |B_P(c) - c| < \infty$, entonces:

$$B_P\left(c\right) = c + \frac{\int_c^{\infty} \left(1 - G(\varepsilon)\right)^{n-1} d\varepsilon}{\left(1 - G(c)\right)^{n-1}}$$

7.4 Densidad de las ofertas ganadoras bajo valor privado:

G es la distribución de probabilidad de C:

$$\begin{aligned} G(c) &= \int_{\theta_1}^{c} \frac{\theta_2 \theta_1^{\theta_2}}{u^{\theta_2+1}} du \\ &= 1 - \left(\frac{\theta_1}{c}\right)^{\theta_2} \end{aligned}$$

donde $c \geq \theta_1$.

Sea $\tilde{G}$ la distribución de probabilidad de las ofertas de equilibrio $B_P(C)$,

$$\begin{aligned} \tilde{G}(b) &= \Pr\left(B_P(c) \leq b\right) \\ &= \Pr\left(\left(\frac{\theta_2(n-1)}{\theta_2(n-1)-1}\right) C \leq b\right) \\ &= \Pr\left(C \leq \left(\frac{\theta_2(n-1)-1}{\theta_2(n-1)}\right) b\right) \\ &= G\left[\left(\frac{\theta_2(n-1)-1}{\theta_2(n-1)}\right) b\right], \\ &= 1 - \left[\frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{(\theta_2(n-1)-1)b}\right]^{\theta_2} \end{aligned}$$

Como $c \geq \theta_1$, entonces $\left(\frac{\theta_2(n-1)-1}{\theta_2(n-1)}\right) b \geq \theta_1$, y por consiguiente $b \geq \frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{(\theta_2(n-1)-1)}$.

Sea H_P la distribución de probabilidad de las ofertas ganadoras

$$W = \min\left\{B_P(C_1), ..., B_P(C_n)\right\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_P(w) &= \Pr\left(W \leq w\right) \\ &= 1 - \Pr\left(W > w\right) \\ &= 1 - \Pr\left(\forall i, \quad B_P(C_i) > w\right) \\ &= 1 - \left[1 - \tilde{G}(w)\right]^n \\ &= 1 - \left[\frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{(\theta_2(n-1)-1)w}\right]^{\theta_2 n} \end{aligned}$$

Dado que w es la oferta ganadora de todas las ofertas, entonces, al igual que b, debe cumplir con la siguiente restricción:

$$w \geq \frac{\theta_1\theta_2(n-1)}{(\theta_2(n-1)-1)}$$

Derivando la distribución de probabilidad, se obtiene la función de densidad de W,

$$h_P(w) = \theta_2 n \left[\frac{\theta_1 \theta_2 (n-1)}{\theta_2 (n-1) - 1} \right] \frac{1}{w^{\theta_2 n + 1}}$$

7.5 Generación de variables aleatorias vía función inversa:

Sea Z una variable aleatoria cualquiera con valores en $\mathbb{R}$, cuya distribución, F_Z, es una monótona. Sea $Y = F_Z(Z)$ y sea F_Y su distribución. Por definición y monotonicidad,

$$\begin{aligned} F_Y(Y) &= \Pr\left[F_Z(Z) \leq y\right] \\ &= \Pr\left[Z \leq F_Z^{-1}(y)\right] \\ &= F_Z\left(F_Z^{-1}(y)\right) \\ &= Y \end{aligned}$$

De la anterior expresión se puede concluir que si Z se distribuye F_Z (monótona), entonces Y se distribuye uniforme entre $[0, 1]$, por tanto, generando realizaciones de Y y aplicando la inversa de F_Z, se hallan realizaciones de Z.

7.6 Algoritmo de determinación de la potencia:

1. Escogemos el número de participantes, n, de la subasta. Para este ejercicio n va a tomar únicamente valores de 10, 50 y 100.
2. Hallamos los valores de θ_1, θ_2, γ_2 y c, tales que la media y la varianza de los datos sea 20 y 400 respectivamente.
3. Escogemos un modelo de subastas $\delta \in \{\text{valor común, valor privado}\}$, Para $\delta =$ valor común, se quiere probar que $\beta = 1$, es decir, la hipótesis nula es $H_0 : \beta = 1$, contra una hipótesis alterna de $H_1 : \beta < 1$. Para $\delta =$ valor privado, se quiere probar que $\beta = 0$, es decir, la hipótesis nula es $H_0 : \beta = 0$, contra una hipótesis alterna de $H_1 : \beta > 0$.
4. Escogemos el número de subastas, s, el cual toma únicamente valores de 20, 100, 500 y 1000.
5. Generamos las realizaciones de la variable aleatoria X ó C bajo el modelo δ, a partir de los valores obtenidos en el paso 2 y de la función inversa de su respectiva distribución de probabilidad.
6. Generamos las realizaciones de las ofertas ganadoras, W, a partir de la matriz $\mathbf{X}$ o $\mathbf{C}$, según δ.
7. Calculamos la media y la varianza de los datos generados de W. Luego hallamos unos nuevos valores de θ_1, θ_2, γ_2 y c, que teóricamente arrojen la nueva media y varianza.

8. Estimamos los parámetros γ_2 y c a partir de la función de verosimilitud obtenida de H_C: y estimamos θ_1y θ_2 a partir de la función de verosimilitud obtenida de H_P. En este paso se utilizan como valores iniciales los obtenidos en 7, y se obtienen los valores iniciales de los cuatro parámetros para iniciar el método de máxima verosimilitud de la combinación convexa.

9. Estimamos los parámetros θ_1, θ_2, γ_2, c y un nuevo parámetro β que surge en la combinación convexa de las funciones de densidad H_C y H_P. Aquí tomamos como valores iniciales de la maximización aquellos obtenidos en el paso 8 y le damos a β el valor inicial de 0.5.

10. Escogemos nuevamente un modelo de subastas $\sigma \in \{$valor común, valor privado$\}$, el cual se va a utilizar para el Montecarlo del paso 11.

11. Montecarlo (loop 100 veces): Generamos, nuevamente, series de ofertas ganadoras, W, para subastas de valor privado y para valor comun, por separado, a partir de los valores de los parámetros obtenidos en el paso 9, utilizando el modelo σ. Para el método de máxima verosimilitud inmerso en el Montecarlo, tomamos como valores iniciales de los parámetros del respectivo modelo aquellos obtenidos en el paso 9, los dejamos fijos, y estimamos los tres parámetros restantes de la combinacion convexa con el nuevo vector de W, con valores iniciales tomados del paso 8 y β en 0.5.

12. Contruimos un vector de los 100 $\tilde{\beta}$ obtenidos en el paso 11 para conocer la distribucion de $\widehat{\beta}$, hallamos el valor crítico al 95% de confiabilidad y hacemos la prueba de hipótesis comparando con el β estimado del paso 9.

13. Prueba de Hipotesis: de aquí obtenemos cuatro posibles respuestas: i) si $\delta = \sigma$ y no se rechaza la hipótesis nula, entonces la respuesta es correcta (A1), ii) si $\delta = \sigma$ y se rechaza la hipótesis nula, entonces la respuesta es incorrecta y es un error tipo 1 (E1), ii) si $\delta \neq \sigma$ y se rechaza la hipótesis nula, entonces la respuesta es correcta (A2) y iv) si $\delta \neq \sigma$ y no se rechaza la hipótesis nula, entonces la respuesta es incorrecta y es un error tipo II (E2).

14. Potencia de la prueba: repetimos los pasos del 5 al 13, 100 veces con el propósito de obtener un vector de 100 observaciones de E1, E2, A1, A2. Hallamos la frecuencia de cada una y se obtiene la potencia de la prueba para una de todas las combinaciones posibles entre n y s.

15. Finalmente repetimos todo el ejercicio para todas las posibles combinaciones de n y s, con el fin de observar cuál es el comportamiento de la prueba a medida que la muestra se hace más grande, y se grafican los resultados.